P.3 Funciones y sus gráficas

- **Usar la notación de función para representar y evaluar funciones.**
- **Encontrar el dominio y recorrido o rango de una función.**
- **Trazar la gráfica de una función.**
- **Identificar los diferentes tipos de transformaciones de las funciones.**
- **Clasificar funciones y reconocer combinaciones de ellas.**

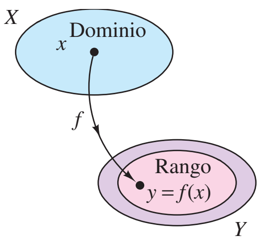
Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos X y Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y), donde x es un elemento de X y y un elemento de Y. Una **función** de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina **variable independiente**, mientras que la variable y se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área A de un círculo es una función de su radio r.

$$A = \pi r^2$$ *A es una función de r.*

En este caso, r es la variable independiente y A, la variable dependiente.



Una función real f de una variable real
Figura P.22

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el **valor de f en x**. El **recorrido o rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X (ver la figura P.22).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, este texto se concentra fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2y = 1$$ *Ecuación en forma implícita.*

define y, la variable dependiente, como función de x, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de y correspondiente a un valor de x dado) resulta conveniente despejar y en el lado izquierdo de la ecuación.

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$ *Ecuación en forma explícita.*

Utilizando f como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$ *Notación de funciones.*

La ecuación original $x^2 + 2y = 1$ define **implícitamente** a y como función de x. Cuando se despeja y, se obtiene la ecuación en forma **explícita**.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como $f(x)$, informando al mismo tiempo que la variable independiente es x y que la función se denota por "f". El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿cuál es el valor de y que corresponde a $x = 3$?" se puede preguntar "¿cuánto vale $f(3)$?"

NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.

En una ecuación que define a una función, el papel de la variable x es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\square) = 2(\square)^2 - 4(\square) + 1$$

donde se usan paréntesis en lugar de x. Para evaluar $f(-2)$, basta con colocar -2 dentro de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituir } x \text{ por } -2. \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 17 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

NOTA Aunque es frecuente usar f como un símbolo adecuado para denotar una función y x para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo, todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } x. \\ f(t) &= t^2 - 4t + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } t. \\ g(s) &= s^2 - 4s + 7 && \text{El nombre de la función es } g\text{, el de la variable independiente es } s. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluación de una función

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, calcular:

a) $f(3a)$ ***b)*** $f(b - 1)$ ***c)*** $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$

Solución

a)
$$\begin{aligned} f(3a) &= (3a)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } 3a. \\ &= 9a^2 + 7 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(b - 1) &= (b - 1)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } b - 1. \\ &= b^2 - 2b + 1 + 7 && \text{Desarrollar el binomio.} \\ &= b^2 - 2b + 8 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[(x + \Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0 \end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO En cálculo, es importante especificar con claridad el dominio de una función o expresión. Por ejemplo, en el ejemplo 1*c*, las expresiones

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

son equivalentes, ya que $\Delta x = 0$ se excluye del dominio de la función o expresión. Si no se estableciera esa restricción del dominio, las dos expresiones no serían equivalentes.

NOTA La expresión del ejemplo 1*c* se llama *cociente incremental* o de *diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se verá más acerca de esto en el capítulo 2.

Dominio y recorrido o rango de una función

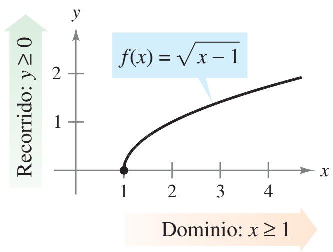
El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera *implícita* mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad 4 \le x \le 5$$

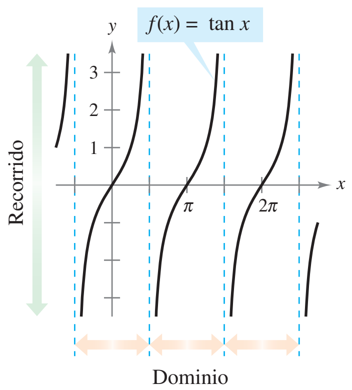
tiene un dominio definido de manera explícita dado por $\{x\colon 4 \le x \le 5\}$. Por otra parte, la función dada por

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

tiene un dominio implícito: es el conjunto $\{x\colon x \ne \pm 2\}$.



a) El dominio de f es $[1, \infty)$ y el recorrido o rango $[0, \infty)$



b) El dominio de f lo constituyen todos los valores reales de x tales que $x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$

Figura P.23

EJEMPLO 2 Cálculo del dominio y del recorrido de una función

a) El dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

es el conjunto de los valores de x tales que $x - 1 \ge 0$; es decir, el intervalo $[1, \infty)$. Para encontrar el recorrido o rango, se observa que $f(x) = \sqrt{x-1}$ nunca es negativo. Por ende, el recorrido o rango es el intervalo $[0, \infty)$, como se señala en la figura P.23*a*.

b) Como se muestra en la figura P.23*b*, el dominio de la función tangente

$$f(x) = \tan x$$

es el conjunto de los valores de x tales que

$$x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero.}$$

Dominio de la función tangente.

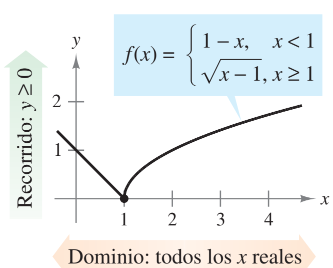
El recorrido o rango de esta función es el conjunto de todos los números reales. Para repasar las características de ésta y otras funciones trigonométricas, ver el apéndice C.

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determinar el dominio y el recorrido o rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

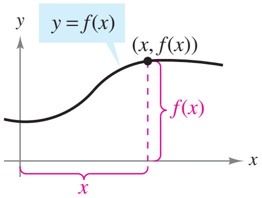
Solución Puesto que f está definida para $x < 1$ y $x \ge 1$, su dominio es todo el conjunto de los números reales. En la parte del dominio donde $x \ge 1$, la función se comporta como en el ejemplo 2*a*. Para $x < 1$, todos los valores de $1 - x$ son positivos. Por consiguiente, el recorrido de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Ver la figura P.24.)



El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$

Figura P.24

Una función de X a Y es **inyectiva** (o uno a uno) si a cada valor de y perteneciente al recorrido o rango le corresponde exactamente un valor x del dominio. Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 2*a* es inyectiva, mientras que las de los ejemplos 2*b* y 3 no lo son. Se dice que una función de X a Y es **suprayectiva** (o sobreyectiva) si su recorrido es todo Y.



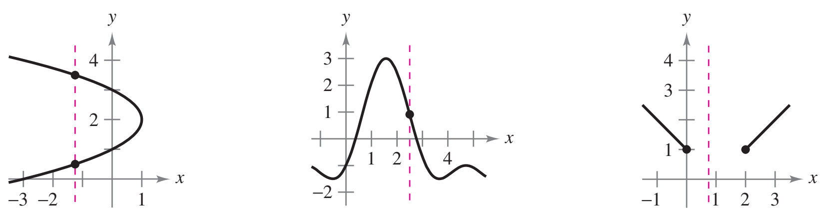
Gráfica de una función
Figura P.25

Gráfica de una función

La gráfica de una función $y = f(x)$ está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. En la figura P.25, puede observarse que

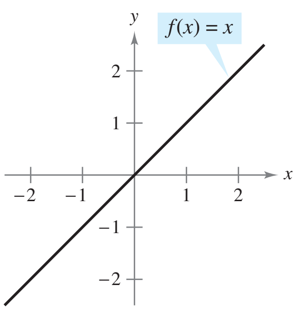
$$x = \text{distancia dirigida desde el eje } y$$
$$f(x) = \text{distancia dirigida desde el eje } x.$$

Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x como máximo *una vez*. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado, llamado **criterio de la recta vertical**, para funciones de x. Es decir, una gráfica en el plano de coordenadas es la gráfica de una función x si y sólo si ninguna recta vertical hace intersección con ella en más de un punto. Por ejemplo, en la figura P.26*a* puede verse que la gráfica no define a y como función de x, ya que hay una recta vertical que corta a la gráfica dos veces, mientras que en las figuras P.26*b* y *c* las gráficas sí definen a y como función de x.

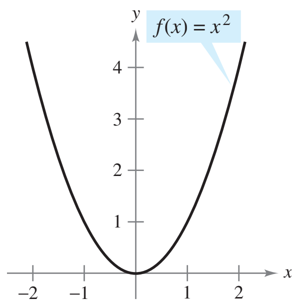


***a*)** No es una función de x ***b*)** Una función de x ***c*)** Una función de x
Figura P.26

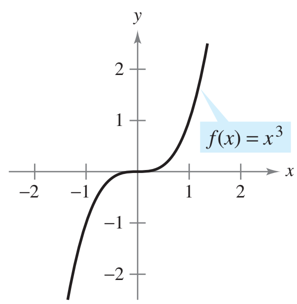
En la figura P.27 se muestran las gráficas de ocho funciones básicas, las cuales hay que conocer bien. (Las gráficas de las otras cuatro funciones trigonométricas básicas se encuentran en el apéndice C.)



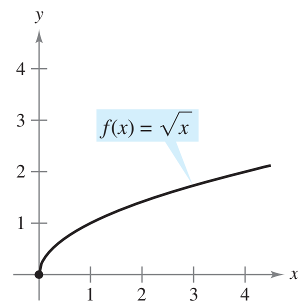
Función identidad



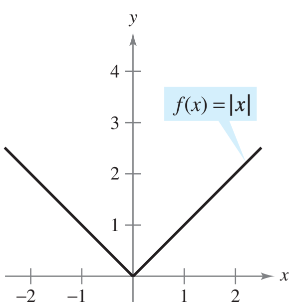
Función cuadrática



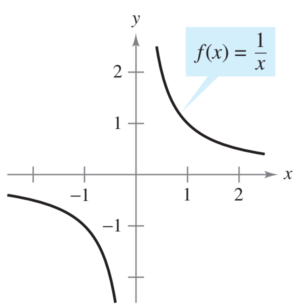
Función cúbica



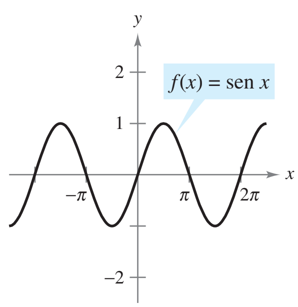
Función raíz cuadrada



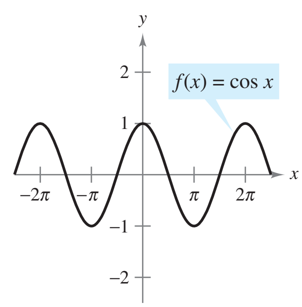
Función valor absoluto



Función racional



Función seno



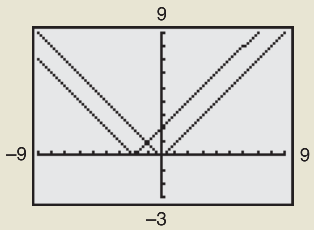
Función coseno

Gráficas de ocho funciones básicas
Figura P.27

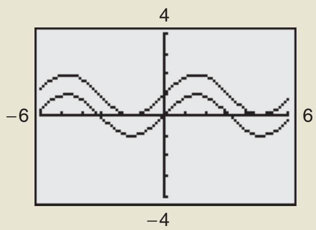
EXPLORACIÓN

Escritura de ecuaciones de funciones Cada una de las pantallas de la herramienta de graficación mostradas abajo exhibe la gráfica de una de las ocho funciones básicas de la página anterior. Cada pantalla muestra también una transformación de la gráfica. Describir esta transformación y usar su descripción para escribir la ecuación de la transformación.

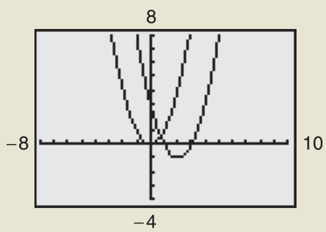
a)



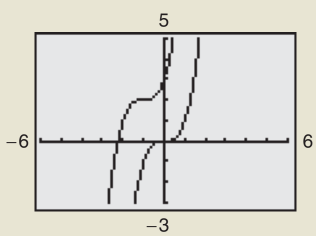
b)



c)

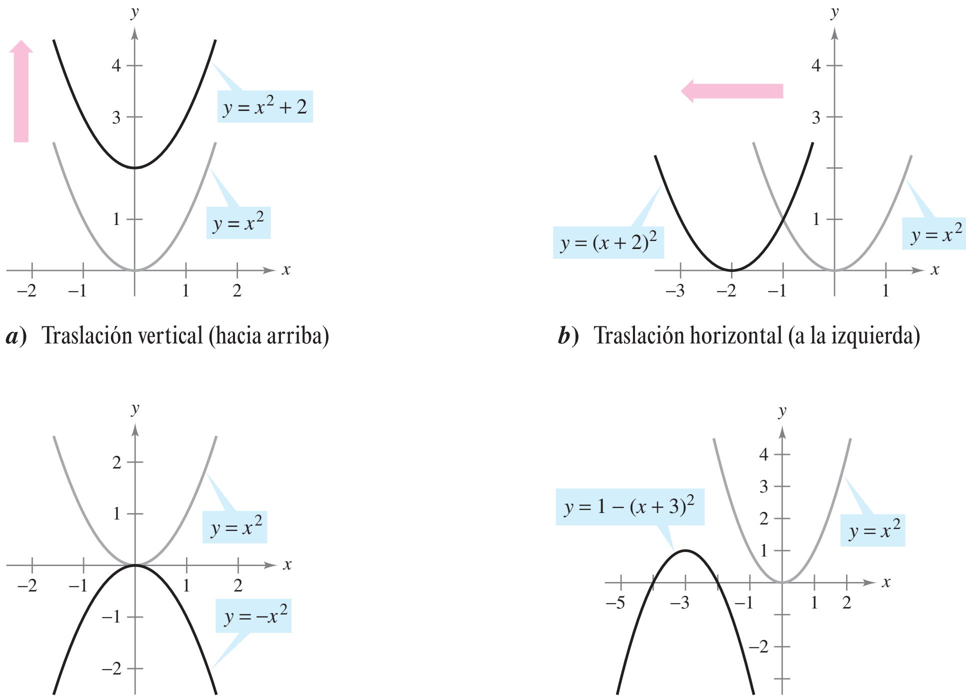


d)



Transformaciones de funciones

Algunas familias de gráficas tienen la misma forma básica. Por ejemplo, vamos a comparar la gráfica de $y = x^2$ con las gráficas de las otras cuatro funciones cuadráticas de la figura P.28.



a) Traslación vertical (hacia arriba)

b) Traslación horizontal (a la izquierda)

c) Reflexión

d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Figura P.28

Cada una de las gráficas de la figura P.28 es una **transformación** de la gráfica de $y = x^2$. Los tres tipos básicos de transformaciones ilustrados por estas gráficas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. La notación de funciones es adecuada para describir transformaciones de gráficas en el plano. Por ejemplo, si se considera que $f(x) = x^2$ es la función original en la figura P.28, las transformaciones mostradas pueden representarse por medio de las siguientes ecuaciones.

$y = f(x) + 2$	Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.
$y = f(x + 2)$	Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda.
$y = -f(x)$	Reflexión respecto al eje x.
$y = -f(x + 3) + 1$	Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje x y traslación de 1 unidad hacia arriba.

TIPOS BÁSICOS DE TRANSFORMACIONES ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la **derecha**:	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda**:	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades **hacia abajo**:	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades **hacia arriba**:	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$

Bettmann/Corbis

LEONHARD EULER (1707-1783)
Además de sus contribuciones esenciales a casi todas las ramas de las matemáticas, Euler fue uno de los primeros en aplicar el cálculo a problemas reales de la física. Sus numerosas publicaciones incluyen temas como construcción de barcos, acústica, óptica, astronomía, mecánica y magnetismo.

Clasificaciones y combinaciones de funciones

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quien debemos la notación $y = f(x)$. Hacia finales del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**. Estas funciones se dividen en tres categorías.

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

En el apéndice C se encuentra un repaso de las funciones trigonométricas. El resto de las funciones no algebraicas, como las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponenciales y logarítmicas, se presentan en el capítulo 5.

El tipo más común de función algebraica es una **función polinomial**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde n es un entero no negativo. Las constantes a_i son **coeficientes** siendo a_n el **coeficiente dominante** y a_0 el **término constante** de la función polinomial. Si $a_n \neq 0$, entonces n es el **grado** de la función polinomial. La función polinomial cero $f(x) = 0$ no se considera grado. Aunque se suelen utilizar subíndices para los coeficientes de funciones polinomiales en general, para las de grados más bajos se utilizan con frecuencia las siguientes formas más sencillas. (Notar que $a \neq 0$.)

Grado cero: $f(x) = a$ Función constante.

Grado uno: $f(x) = ax + b$ Función lineal.

Grado dos: $f(x) = ax^2 + bx + c$ Función cuadrática.

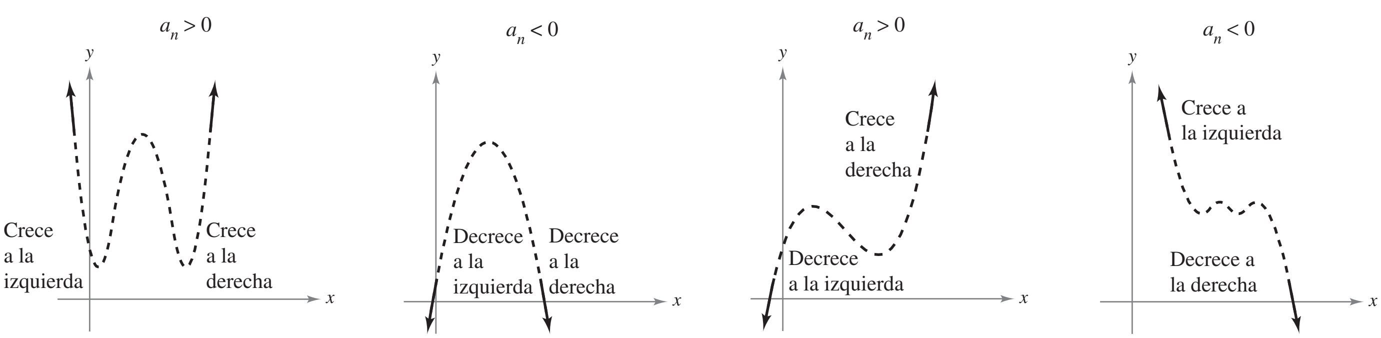
Grado tres: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Función cúbica.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Puede encontrarse más información sobre la historia del concepto de función en el artículo "Evolution of the Function Concept: A Brief Survey", de Israel Kleiner, en *The College Mathematics Journal*.

Aunque la gráfica de una función polinomial no constante puede presentar varias inflexiones, en algún momento ascenderá o descenderá sin límite al moverse x hacia la izquierda o hacia la derecha. Se puede determinar qué ocurre en la gráfica de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

eventualmente crece o decrece a partir del grado de la función (par o impar) y del coeficiente dominante a_n, como se indica en la figura P.29. Observar que las regiones punteadas muestran que la **prueba o el criterio del coeficiente dominante** *sólo* determina el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica.



Gráficas de funciones polinomiales de grado par

Gráficas de funciones polinomiales de grado impar

Prueba del coeficiente dominante para funciones polinomiales
Figura P.29

Del mismo modo que un número racional puede escribirse como el cociente de dos enteros, una **función racional** puede expresarse como el cociente de dos polinomios. De manera específica, una función f es racional si tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

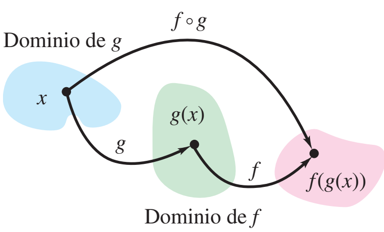
donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomiales.

Las funciones polinomiales y las racionales son ejemplos de **funciones algebraicas**. Se llama función algebraica de x a aquella que puede expresarse mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces que contengan x^n. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x+1}$ es algebraica. Las funciones no algebraicas se denominan **trascendentes**. Por ejemplo, las funciones trigonométricas son trascendentes.

Es posible combinar dos funciones de varias formas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, se pueden construir las siguientes funciones.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) \qquad \text{Suma.}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) \qquad \text{Diferencia.}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1) \qquad \text{Producto.}$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1} \qquad \text{Cociente.}$$

Aún hay otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición**. La función resultante recibe el nombre de **función compuesta**.



El dominio de la función compuesta $f \circ g$
Figura P.30

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función **compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f (ver la figura P.30).

La función compuesta de f con g puede no ser igual a la función compuesta de g con f.

EJEMPLO 4 Composición de funciones

Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \cos x$, encontrar cada una de las funciones compuestas:

a) $f \circ g$ ***b)*** $g \circ f$

Solución

a)
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g. \\ &= f(\cos x) && \text{Sustituir } g(x) = \cos x. \\ &= 2(\cos x) - 3 && \text{Definición de } f(x). \\ &= 2 \cos x - 3 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f. \\ &= g(2x - 3) && \text{Sustituir } f(x) = 2x - 3. \\ &= \cos(2x - 3) && \text{Definición de } g(x). \end{aligned}$$

Observar que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

EXPLORACIÓN

Utilice una herramienta de graficación para representar cada función. Determinar si la función es *par*, *impar*, o *ninguna* de las dos.

$f(x) = x^2 - x^4$

$g(x) = 2x^3 + 1$

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$j(x) = 2 - x^6 - x^8$

$k(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$

$p(x) = x^9 + 3x^5 - x^3 + x$

Describir una manera de identificar una función como par o impar mediante un análisis visual de la ecuación.

En la sección P.1 se definió la intersección en x de una gráfica como todo punto $(a, 0)$ en el que la gráfica corta al eje x. Si la gráfica representa una función f, el número a es un **cero** de f. En otras palabras, los *ceros de una función f son las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$. Por ejemplo, la función $f(x) = x - 4$ tiene un cero en $x = 4$ porque $f(4) = 0$.

En la sección P.1 también se estudiaron diferentes tipos de simetrías. En la terminología de funciones, se dice que una función es **par** si su gráfica es simétrica respecto al eje y, y se dice que es **impar** si su gráfica es simétrica con respecto al origen. Los criterios de simetría de la sección P.l conducen a la siguiente prueba para las funciones pares e impares.

PRUEBA PARA LAS FUNCIONES PARES E IMPARES

La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$.
La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

NOTA Con excepción de la función constante, por ejemplo $f(x) = 0$, la gráfica de una función de x no puede ser simétrica con respecto al eje x, puesto que entonces violaría la prueba de la recta vertical para la gráfica de una función.

EJEMPLO 5 Funciones pares o impares y ceros de funciones

Determinar si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas. Después, calcular los ceros de la función.

a) $f(x) = x^3 - x$ ***b)*** $g(x) = 1 + \cos x$

Solución

a) La función es impar, porque

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Los ceros de f se calculan como sigue.

$$x^3 - x = 0 \qquad \text{Hacer } f(x) = 0.$$

$$x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 1, -1 \qquad \text{Ceros de } f.$$

Ver la figura P.3l*a*.

b) La función es par, porque

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x). \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

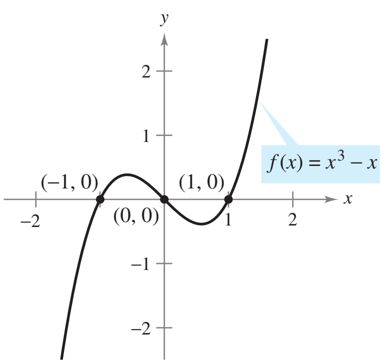
Los ceros de g se calculan como sigue.

$$1 + \cos x = 0 \qquad \text{Hacer } g(x) = 0.$$

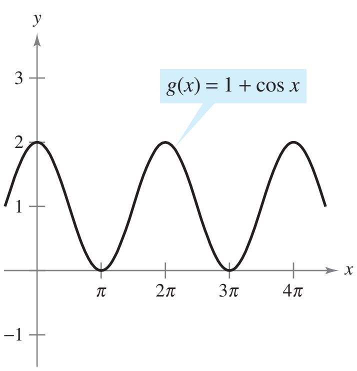
$$\cos x = -1 \qquad \text{Restar 1 en ambos miembros.}$$

$$x = (2n + 1)\pi, \text{ con } n \text{ entero} \qquad \text{Ceros de } g.$$

Ver la figura P.31*b*.



a) Función impar



b) Función par
Figura P.31

NOTA Cada una de las funciones del ejemplo 5 es par o impar. Sin embargo, muchas funciones, como $f(x) = x^2 + x + 1$ no son pares ni impares.

P.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar las gráficas de f y g para resolver lo siguiente:

a) **Identificar los dominios y los recorridos o rangos de f y g.**

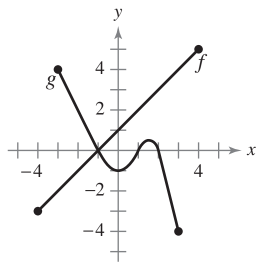
b) **Identificar $f(-2)$ y $g(3)$.**

c) **¿Para qué valor(es) de x es $f(x) = g(x)$?**

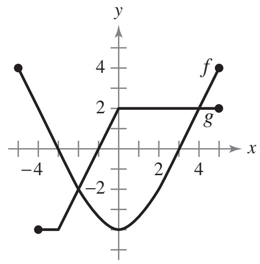
d) **Calcular la(s) solución(es) de $f(x) = 2$.**

e) **Calcular las soluciones de $g(x) = 0$.**

1.



2.



En los ejercicios 3 a 12, evaluar (si es posible) la función en los valores dados de la variable independiente. Simplificar los resultados.

3. $f(x) = 7x - 4$

a) $f(0)$

b) $f(-3)$

c) $f(b)$

d) $f(x-1)$

4. $f(x) = \sqrt{x+5}$

a) $f(-4)$

b) $f(11)$

c) $f(-8)$

d) $f(x + \Delta x)$

5. $g(x) = 5 - x^2$

a) $g(0)$

b) $g(\sqrt{5})$

c) $g(-2)$

d) $g(t-1)$

6. $g(x) = x^2(x-4)$

a) $g(4)$

b) $g\left(\frac{3}{2}\right)$

c) $g(c)$

d) $g(t+4)$

7. $f(x) = \cos 2x$

a) $f(0)$

b) $f(-\pi/4)$

c) $f(\pi/3)$

8. $f(x) = \operatorname{sen} x$

a) $f(\pi)$

b) $f(5\pi/4)$

c) $f(2\pi/3)$

9. $f(x) = x^3$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

10. $f(x) = 3x - 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

12. $f(x) = x^3 - x$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

En los ejercicios 13 a 20, encontrar el dominio y el recorrido o rango de la función.

13. $f(x) = 4x^2$

14. $g(x) = x^2 - 5$

15. $g(x) = \sqrt{6x}$

16. $h(x) = -\sqrt{x+3}$

17. $f(t) = \sec \dfrac{\pi t}{4}$

18. $h(t) = \cot t$

19. $f(x) = \dfrac{3}{x}$

20. $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

En los ejercicios 21 a 26, encontrar el dominio de la función.

21. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

23. $g(x) = \dfrac{2}{1 - \cos x}$

24. $h(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{|x+3|}$

26. $g(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 4|}$

En los ejercicios 27 a 30, evaluar la función como se indica. Determinar su dominio y su recorrido o rango.

27. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ 2x+2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(-1)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(2)$ *d)* $f(t^2+1)$

28. $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \leq 1 \\ 2x^2+2, & x > 1 \end{cases}$

a) $f(-2)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(1)$ *d)* $f(s^2+2)$

29. $f(x) = \begin{cases} |x|+1, & x < 1 \\ -x+1, & x \geq 1 \end{cases}$

a) $f(-3)$ *b)* $f(1)$ *c)* $f(3)$ *d)* $f(b^2+1)$

30. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x \leq 5 \\ (x-5)^2, & x > 5 \end{cases}$

a) $f(-3)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(5)$ *d)* $f(10)$

En los ejercicios 31 a 38, trazar la gráfica de la función y encontrar su dominio y su recorrido o rango. Utilizar una herramienta graficadora para comprobar las gráficas.

31. $f(x) = 4 - x$

32. $g(x) = \dfrac{4}{x}$

33. $h(x) = \sqrt{x-6}$

34. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3$

35. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

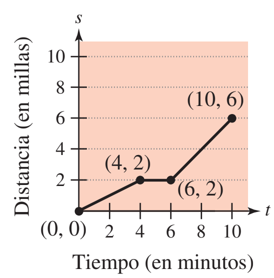
36. $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

37. $g(t) = 3 \operatorname{sen} \pi t$

38. $h(\theta) = -5 \cos \dfrac{\theta}{2}$

Desarrollo de conceptos

39. En la figura se muestra la gráfica de la distancia que recorre un estudiante en su camino de 10 minutos a la escuela. Dar una descripción verbal de las características del recorrido del estudiante hacia la escuela.

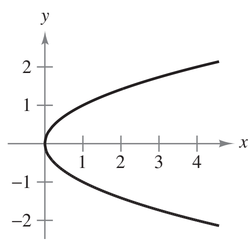


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

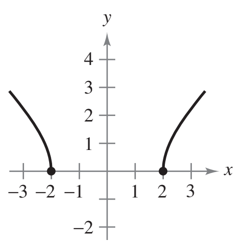
40. Tras unos minutos de recorrido, un estudiante que conduce 27 millas para ir a la universidad recuerda que olvidó en casa el trabajo que tiene que entregar ese día. Conduciendo a mayor velocidad de la que acostumbra, regresa a casa, recoge su trabajo y reemprende su camino a la universidad. Trazar la posible gráfica de la distancia de la casa del estudiante como función del tiempo.

En los ejercicios 41 a 44, aplicar la prueba de la recta vertical para determinar si *y* es una función de *x*.

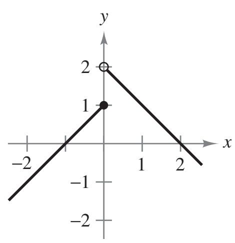
41. $x - y^2 = 0$



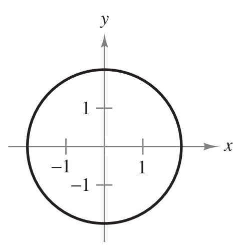
42. $\sqrt{x^2 - 4} - y = 0$



43. $y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$



44. $x^2 + y^2 = 4$



En los ejercicios 45 a 48, determinar si *y* es una función de *x*.

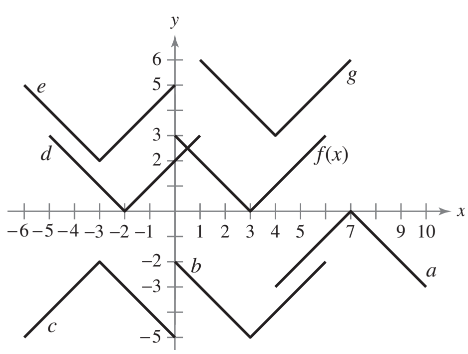
45. $x^2 + y^2 = 16$

46. $x^2 + y = 16$

47. $y^2 = x^2 - 1$

48. $x^2y - x^2 + 4y = 0$

En los ejercicios 49 a 54, utilizar la gráfica de $y = f(x)$ para relacionar la función con su gráfica.



49. $y = f(x + 5)$

50. $y = f(x) - 5$

51. $y = -f(-x) - 2$

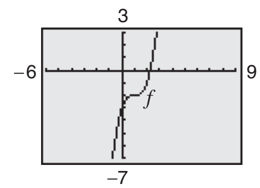
52. $y = -f(x - 4)$

53. $y = f(x + 6) + 2$

54. $y = f(x - 1) + 3$

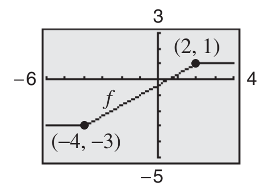
55. Utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura para dibujar la gráfica de cada función.

a) $f(x + 3)$ *b)* $f(x - 1)$
c) $f(x) + 2$ *d)* $f(x) - 4$
e) $3f(x)$ *f)* $\frac{1}{4}f(x)$



56. Utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura para dibujar la gráfica de cada función.

a) $f(x - 4)$ *b)* $f(x + 2)$
c) $f(x) + 4$ *d)* $f(x) - 1$
e) $2f(x)$ *f)* $\frac{1}{2}f(x)$



57. Utilizar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para dibujar la gráfica de cada función. En todos los casos, describa la transformación.

a) $y = \sqrt{x} + 2$ *d)* $y = -\sqrt{x}$ *c)* $y = \sqrt{x - 2}$

58. Especificar una secuencia de transformaciones que tenga como resultado cada gráfica de h a partir de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) $h(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ *b)* $h(x) = -\operatorname{sen}(x - 1)$

59. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, evaluar cada expresión.

a) $f(g(1))$ *b)* $g(f(1))$ *c)* $g(f(0))$
d) $f(g(-4))$ *e)* $f(g(x))$ *f)* $g(f(x))$

60. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \pi x$, evaluar cada expresión.

a) $f(g(2))$ *b)* $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *c)* $g(f(0))$

d) $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *e)* $f(g(x))$ *f)* $g(f(x))$

En los ejercicios 61 a 64, encontrar las funciones compuestas $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$. ¿Cuál es el dominio de cada función compuesta? ¿Son iguales ambas funciones compuestas?

61. $f(x) = x^2$
$g(x) = \sqrt{x}$

62. $f(x) = x^2 - 1$
$g(x) = \cos x$

63. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
$g(x) = x^2 - 1$

64. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
$g(x) = \sqrt{x + 2}$

65. Utilizar las gráficas de f y de g para evaluar cada expresión. Si el resultado es indefinido, explicar por qué.

a) $(f \circ g)(3)$ *b)* $g(f(2))$
c) $g(f(5))$ *d)* $(f \circ g)(-3)$
e) $(g \circ f)(-1)$ *f)* $f(g(-1))$