1.3 Cálculo analítico de límites

- Evaluar un límite mediante el uso de las propiedades de los límites.
- Desarrollar y usar una estrategia para el cálculo de límites.
- Evaluar un límite mediante el uso de técnicas de cancelación y de racionalización.
- Evaluar un límite mediante el uso del teorema del encaje.

Propiedades de los límites

En la sección 1.2 se vio que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c no depende del valor de f en $x = c$. Sin embargo, puede darse el caso de que este límite sea $f(c)$. En esta situación, se puede evaluar el límite por **sustitución directa**. Esto es:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c). \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } c.$$

Las funciones con este *buen comportamiento* son **continuas en *c***. En la sección 1.4 se examinará con más detalle este concepto.

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

1. $\lim_{x \to c} b = b$ **2.** $\lim_{x \to c} x = c$ **3.** $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

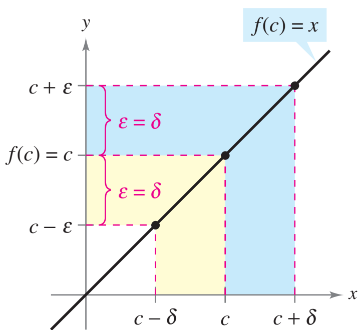


Figura 1.16

DEMOSTRACIÓN Para comprobar la propiedad 2 del teorema 1.1, es necesario demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para lograrlo, elegir $\delta = \varepsilon$. Entonces, la segunda desigualdad lleva implícita a la primera, como se muestra en la figura 1.16. Con esto se realiza la comprobación. (Las comprobaciones de las demás propiedades de los límites de esta sección se encuentran en el apéndice A o se analizan en los ejercicios.)

NOTA Cuando se tengan nuevas notaciones o símbolos en matemáticas, hay que cerciorarse de conocer cómo se leen. Por ejemplo, el límite del ejemplo 1c se lee "el límite de x^2 cuando x se aproxima a 2 es 4".

EJEMPLO 1 Evaluación de límites básicos

a) $\lim_{x \to 2} 3 = 3$ ***b)*** $\lim_{x \to -4} x = -4$ ***c)*** $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim_{x \to c} [b f(x)] = bL$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = LK$

4. Cociente: $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencias: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

EJEMPLO 2 Límite de un polinomio

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(4x^2+3) &= \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3 && \text{Propiedad 2.}\\
&= 4\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + \lim_{x\to 2} 3 && \text{Propiedad 1.}\\
&= 4(2^2) + 3 && \text{Ejemplo 1.}\\
&= 19 && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 2, se observa que el límite (cuando $x \to 2$) de la *función polinomial* $p(x) = 4x^2 + 3$ es simplemente el valor de p en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19.$$

Esta propiedad de *sustitución directa* es válida para todas las funciones polinomiales y racionales cuyos denominadores no se anulen en el punto considerado.

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Si p es una función polinomial y c un número real, entonces:

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c).$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

EJEMPLO 3 Límite de una función racional

Encontrar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1}$.

Solución Puesto que el denominador no es 0 cuando $x = 1$, se puede aplicar el teorema 1.3 para obtener

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Las funciones polinomiales y racionales son dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas. El siguiente teorema se refiere al límite del tercer tipo de función algebraica: el que contiene un radical. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Si n es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par:

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

EL SÍMBOLO DE RAÍZ CUADRADA

El primer uso de un símbolo para denotar a la raíz cuadrada data del siglo XVI. Al principio, los matemáticos emplearon el símbolo $\surd$, que tiene sólo dos trazos. Éste se eligió por su parecido con una *r* minúscula, para representar la palabra latina *radix*, que significa raíz.

El siguiente teorema aumentará notablemente su capacidad para calcular límites, ya que muestra cómo tratar el límite de una función compuesta. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L).$$

EJEMPLO 4 Límite de una función compuesta

a) Puesto que

$$\lim_{x\to 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2.$$

b) Puesto que

$$\lim_{x\to 3} (2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

se sigue que

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por medio de la sustitución directa. Las seis funciones trigonométricas básicas también cuentan con esta deseable propiedad, como se muestra en el siguiente teorema (presentado sin demostración).

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.

1. $\lim_{x\to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$ **2.** $\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$

3. $\lim_{x\to c} \tan x = \tan c$ **4.** $\lim_{x\to c} \cot x = \cot c$

5. $\lim_{x\to c} \sec x = \sec c$ **6.** $\lim_{x\to c} \csc x = \csc c$

EJEMPLO 5 Límites de funciones trigonométricas

a) $\lim_{x\to 0} \tan x = \tan(0) = 0$

b) $\lim_{x\to \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x\to \pi} x\right)\left(\lim_{x\to \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = 0^2 = 0$

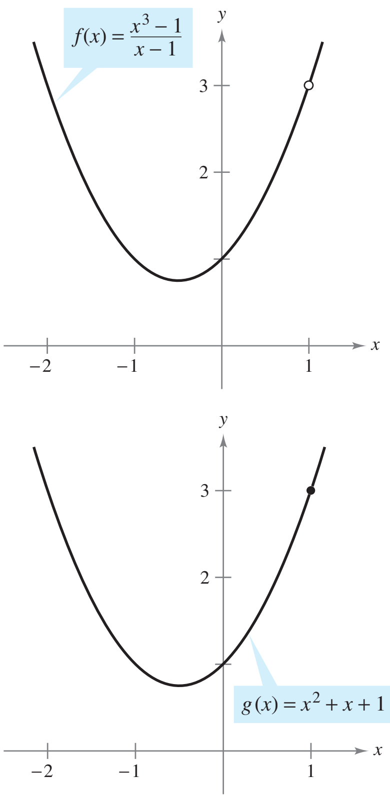
Una estrategia para el cálculo de límites

En las tres páginas previas se han estudiado diversos tipos de funciones cuyos límites pueden calcularse mediante sustitución directa. Lo anterior, aunado al teorema siguiente, permite desarrollar una estrategia para calcular límites. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN EN TODO SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x).$$



f y *g* coinciden salvo en un punto
Figura 1.17

EJEMPLO 6 Cálculo del límite de una función

Encontrar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Solución Sea $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$. Al factorizar y cancelar factores, f se puede escribir como

$$f(x) = \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = x^2 + x + 1 = g(x), \qquad x \neq 1.$$

De tal modo, para todos los valores de x distintos de $x = 1$, las funciones f y g coinciden, como se muestra en la figura 1.17. Puesto que el $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe, se puede aplicar el teorema 1.7 y concluir que f y g tienen el mismo límite en $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} && \text{Factorizar.}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x - 1}} && \text{Cancelar factores idénticos o factores comunes.}\\
&= \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) && \text{Aplicar el teorema 1.7.}\\
&= 1^2 + 1 + 1 && \text{Usar sustitución directa.}\\
&= 3 && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se aplique esta estrategia al cálculo de límites, recordar que algunas funciones no tienen límite (cuando x se aproxima a c). Por ejemplo, el siguiente límite no existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 1}{x - 1}.$$

UNA ESTRATEGIA PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

1. Aprender a reconocer cuáles límites pueden evaluarse por medio de la sustitución directa (estos límites se enumeran en los teoremas 1.1 a 1.6).
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c *no se puede evaluar* por sustitución directa, tratar de encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = c$. [Seleccionar una g tal que el límite de $g(x)$ *se pueda evaluar* por medio de la sustitución directa.]
3. Aplicar el teorema 1.7 para concluir *de manera analítica* que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = g(c).$$

4. Utilizar una *gráfica* o una *tabla* para respaldar la conclusión.

Técnicas de cancelación y de racionalización

En los ejemplos 7 y 8 se muestran dos técnicas para calcular límites de manera analítica. La primera utiliza la cancelación de factores comunes y la segunda, la racionalización del numerador de una fracción.

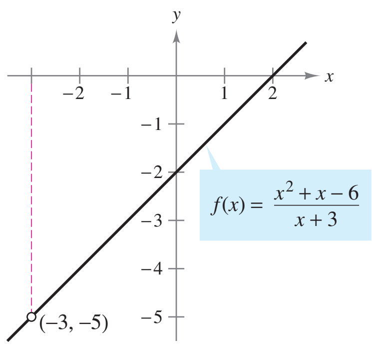
EJEMPLO 7 Técnica de cancelación

Encontrar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$.

Solución Aunque se trata del límite de una función racional, *no se puede* aplicar el teorema 1.3 debido a que el límite del denominador es 0.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \qquad \begin{aligned} &\lim_{x\to -3} (x^2 + x - 6) = 0 \\ &\lim_{x\to -3} (x + 3) = 0 \end{aligned}$$

La sustitución directa falla.



f no está definida para $x = -3$
Figura 1.18

Puesto que el límite del numerador también es 0, numerador y denominador tienen un *factor común*: $(x + 3)$. Por tanto, para toda $x \neq -3$, se cancela este factor para obtener

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{\cancel{(x + 3)}(x - 2)}{\cancel{x + 3}} = x - 2 = g(x), \qquad x \neq -3.$$

Empleando el teorema 1.7, se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} &= \lim_{x\to -3} (x - 2) && \text{Aplicar el teorema 1.7.} \\ &= -5. && \text{Usar sustitución directa.} \end{aligned}$$

Este resultado se muestra de forma gráfica en la figura 1.18. Observar que la gráfica de la función *f* coincide con la de la función $g(x) = x - 2$, sólo que la gráfica de *f* tiene un hueco en el punto $(-3, -5)$.

NOTA En la solución del ejemplo 7, cerciorarse de distinguir la utilidad del teorema de factorización del álgebra. Este teorema establece que si c es un cero de una función polinomial, entonces $(x - c)$ es un factor del polinomio. Por tanto, si se aplica sustitución directa a una función racional y se obtiene

$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \frac{0}{0}$$

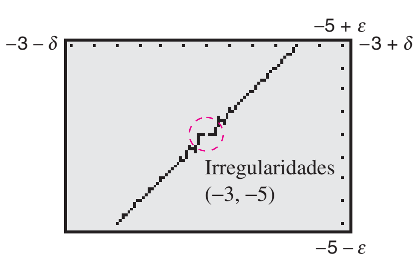
puede concluirse que $(x - c)$ es un factor común de $p(x)$ y de $q(x)$.

En el ejemplo 7, la sustitución directa produce la forma fraccionaria 0/0, que carece de significado. A una expresión como 0/0 se le denomina **forma indeterminada** porque no es posible (a partir sólo de esa forma) determinar el límite. Si al intentar evaluar un límite se llega a esta forma, debe reescribirse la fracción de modo que el nuevo denominador no tenga 0 como límite. Una manera de lograrlo consiste en *cancelar los factores idénticos o comunes*, como se muestra en el ejemplo 7. Otra manera consiste en *racionalizar el numerador*, como se hace en el ejemplo 8.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Puesto que las gráficas de

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x - 2$$

difieren sólo en el punto $(-3, -5)$, la configuración normal de una herramienta de graficación podría no distinguir entre ellas. No obstante, debido a la configuración de puntos ("pixeles") y a los errores de redondeo, quizá sea posible encontrar configuraciones de pantalla que distingan las gráficas. De manera específica, aplicando el *zoom* repetidas veces cerca del punto $(-3, -5)$ en la gráfica de *f*, la herramienta de graficación podría mostrar fallas o irregularidades que no existen en la gráfica real (ver la figura 1.19). Si se modifica la configuración de pantalla, podría obtenerse la gráfica correcta de *f*.



Gráfica incorrecta de *f*
Figura 1.19

EJEMPLO 8 Técnica de racionalización

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Solución Al utilizar la sustitución directa, se obtiene la forma indeterminada 0/0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{x+1}-1\right) = 0 \\ \\ \searrow \ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{array}$$

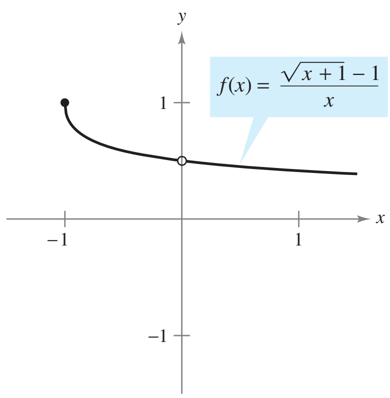
La sustitución directa falla.

En este caso, se puede reescribir la fracción racionalizando el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \\ &= \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \qquad x \neq 0 \end{aligned}$$

Ahora, cuando se emplea el teorema 1.7, se puede evaluar el límite como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es $\frac{1}{2}$
Figura 1.20

Una tabla o una gráfica puede servir para fortalecer la conclusión de que el límite es $\frac{1}{2}$ (ver la figura 1.20).

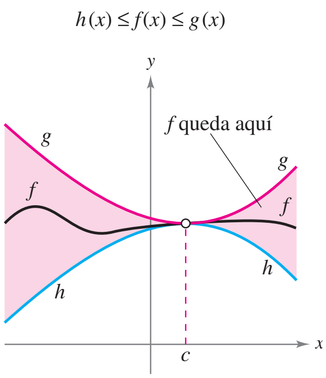
x se aproxima a cero por la izquierda. → ← x se aproxima a cero por la derecha.

x	−0.25	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
$f(x)$	0.5359	0.5132	0.5013	0.5001	?	0.4999	0.4988	0.4881	0.4721

$f(x)$ se aproxima a 0.5. → ← $f(x)$ se aproxima a 0.5.

NOTA La técnica de racionalización en el cálculo de límites se basa en multiplicar por una forma conveniente de 1. En el ejemplo 8, la forma apropiada es

$$1 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}.$$



Teorema del encaje
Figura 1.21

Teorema del encaje

El siguiente teorema se refiere al límite de una función que está "encajada" entre otras dos, cada una de las cuales tiene el mismo límite en un valor dado de x, como se muestra en la figura 1.21 (ver la demostración de este teorema en el apéndice A).

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c, por la posible excepción de la propia c, y si

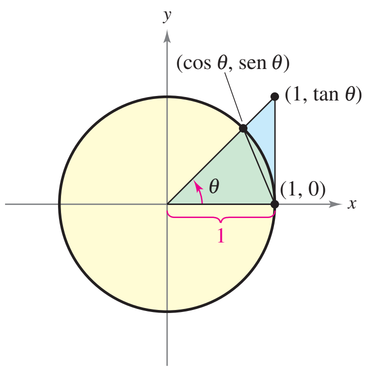
$$\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$$

entonces el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L.

En la demostración del teorema 1.9 se aprecia la utilidad del teorema del encaje (también se le llama teorema del emparedado o del pellizco).

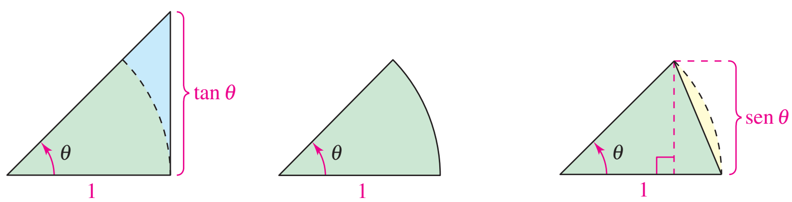
TEOREMA 1.9 DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$



Sector circular utilizado para demostrar el teorema 1.9
Figura 1.22

DEMOSTRACIÓN Con el fin de evitar la confusión entre dos usos distintos de x, se presenta la demostración utilizando la variable θ, donde θ denota un ángulo agudo positivo *medido en radianes*. En la figura 1.22 se muestra un sector circular encajado o emparedado entre dos triángulos.



Área del triángulo ≥ Área del sector ≥ Área del triángulo

$$\frac{\tan\theta}{2} \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$$

Al multiplicar cada expresión por $2/\operatorname{sen}\theta$ resulta

$$\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \geq 1$$

tomando sus recíprocos e invirtiendo las desigualdades se obtiene:

$$\cos\theta \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1.$$

Puesto que $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y $(\operatorname{sen}\theta)/\theta = [\operatorname{sen}(-\theta)]/(-\theta)$, se concluye que esta desigualdad es válida para *todo* θ distinto de cero dentro del intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Por último, dado que $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ y $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$, se puede aplicar el teorema del encaje para concluir que $\lim\limits_{\theta\to 0} (\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$. La demostración del segundo límite se deja como ejercicio para el lector (ver el ejercicio 123).

EJEMPLO 9 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

Solución La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, se puede escribir $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

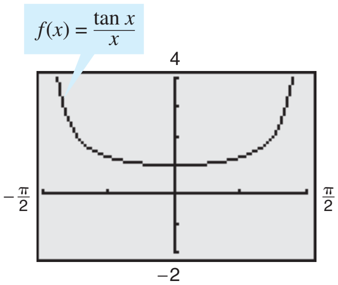
Ahora, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

se puede obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) \\ &= (1)(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(Ver la figura 1.23.)



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 1
Figura 1.23

EJEMPLO 10 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$.

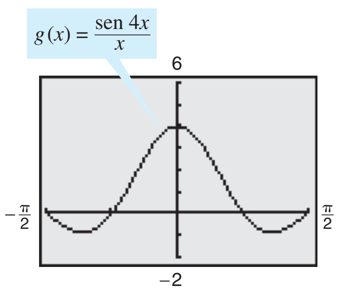
Solución La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, se puede escribir el límite como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = 4\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\right). \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 4.}$$

Al ser ahora $y = 4x$ y observar que $x \to 0$ si y sólo si $y \to 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} &= 4\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\right) \\ &= 4\left(\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) \\ &= 4(1) && \text{Aplicar el teorema 1.9(1).} \\ &= 4. \end{aligned}$$

(Ver la figura 1.24.)



El límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 4
Figura 1.24

TECNOLOGÍA Utilizar una herramienta de graficación para confirmar los límites de los ejemplos y del conjunto de ejercicios. Por ejemplo, las figuras 1.23 y 1.24 muestran las gráficas de:

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}.$$

Observar que la primera gráfica parece contener el punto (0, 1) y la segunda al punto (0, 4), lo cual respalda las conclusiones obtenidas en los ejemplos 9 y 10.

1.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los límites de manera visual.

1. $h(x) = -x^2 + 4x$

a) $\lim_{x\to 4} h(x)$

b) $\lim_{x\to -1} h(x)$

2. $g(x) = \dfrac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$

a) $\lim_{x\to 4} g(x)$

b) $\lim_{x\to 0} g(x)$

3. $f(x) = x \cos x$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim_{x\to \pi/3} f(x)$

4. $f(t) = t|t - 4|$

a) $\lim_{t\to 4} f(t)$

b) $\lim_{t\to -1} f(t)$

En los ejercicios 5 a 22, calcular el límite.

5. $\lim_{x\to 2} x^3$

6. $\lim_{x\to -2} x^4$

7. $\lim_{x\to 0} (2x - 1)$

8. $\lim_{x\to -3} (3x + 2)$

9. $\lim_{x\to -3} (x^2 + 3x)$

10. $\lim_{x\to 1} (-x^2 + 1)$

11. $\lim_{x\to -3} (2x^2 + 4x + 1)$

12. $\lim_{x\to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$

13. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x + 1}$

14. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x + 4}$

15. $\lim_{x\to -4} (x + 3)^2$

16. $\lim_{x\to 0} (2x - 1)^3$

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x}$

18. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2}{x + 2}$

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2 + 4}$

20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x - 3}{x + 5}$

21. $\lim_{x\to 7} \dfrac{3x}{\sqrt{x + 2}}$

22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 4}$

En los ejercicios 23 a 26, encontrar los límites.

23. $f(x) = 5 - x,\ g(x) = x^3$

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to 4} g(x)$ *c)* $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

24. $f(x) = x + 7,\ g(x) = x^2$

a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to 4} g(x)$ *c)* $\lim_{x\to -3} g(f(x))$

25. $f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x + 1}$

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to 3} g(x)$ *c)* $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

26. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x + 6}$

a) $\lim_{x\to 4} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to 21} g(x)$ *c)* $\lim_{x\to 4} g(f(x))$

En los ejercicios 27 a 36, encontrar el límite de la función trigonométrica.

27. $\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x$

28. $\lim_{x\to \pi} \tan x$

29. $\lim_{x\to 1} \cos \dfrac{\pi x}{3}$

30. $\lim_{x\to 2} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$

31. $\lim_{x\to 0} \sec 2x$

32. $\lim_{x\to \pi} \cos 3x$

33. $\lim_{x\to 5\pi/6} \operatorname{sen} x$

34. $\lim_{x\to 5\pi/3} \cos x$

35. $\lim_{x\to 3} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

36. $\lim_{x\to 7} \sec\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

En los ejercicios 37 a 40, utilizar la información que se expone para evaluar los límites.

37. $\lim_{x\to c} f(x) = 3$

$\lim_{x\to c} g(x) = 2$

a) $\lim_{x\to c} [5g(x)]$

b) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

38. $\lim_{x\to c} f(x) = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to c} g(x) = \frac{1}{2}$

a) $\lim_{x\to c} [4f(x)]$

b) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

39. $\lim_{x\to c} f(x) = 4$

a) $\lim_{x\to c} [f(x)]^3$

b) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)}$

c) $\lim_{x\to c} [3f(x)]$

d) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{3/2}$

40. $\lim_{x\to c} f(x) = 27$

a) $\lim_{x\to c} \sqrt[3]{f(x)}$

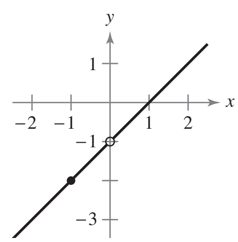
b) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{18}$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)]^2$

d) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{2/3}$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar la gráfica para determinar el límite (si existe) de manera visual. Escribir una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto.

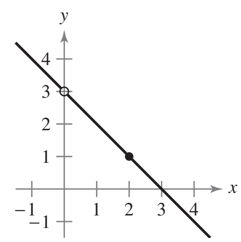
41. $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$



a) $\lim_{x\to 0} g(x)$

b) $\lim_{x\to -1} g(x)$

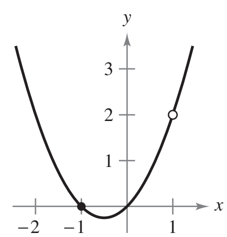
42. $h(x) = \dfrac{-x^2 + 3x}{x}$



a) $\lim_{x\to 2} h(x)$

b) $\lim_{x\to 0} h(x)$

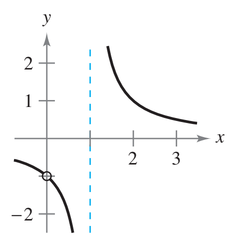
43. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$



a) $\lim_{x\to 1} g(x)$

b) $\lim_{x\to -1} g(x)$

44. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar el límite de la función (si existe). Escribir una función más simple que coincida con la dada salvo en un punto. Utilizar una herramienta de graficación para confirmar el resultado.

45. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

46. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$

47. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

48. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

En los ejercicios 49 a 64, encontrar el límite (si existe).

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2-x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x^2+2x}$

51. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-16}$

52. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{x^2-9}$

53. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

54. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$

55. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

56. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

57. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

59. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(3+x)]-(1/3)}{x}$

60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(x+4)]-(1/4)}{x}$

61. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$

62. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

63. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+1-(x^2-2x+1)}{\Delta x}$

64. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

En los ejercicios 65 a 76, determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

65. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x}$

66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x}$

67. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^2}$

68. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta}$

69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

70. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

71. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1-\cos h)^2}{h}$

72. $\lim\limits_{\phi\to \pi} \phi \sec \phi$

73. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

74. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

75. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$

76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ $\left[\textit{Sugerencia}\text{: Encontrar } \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\left(\dfrac{3x}{3\operatorname{sen} 3x}\right).\right]$

Análisis gráfico, numérico y analítico **En los ejercicios 77 a 84, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar el límite. Emplear una tabla para respaldar la conclusión. Posteriormente, calcular el límite empleando métodos analíticos.**

77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

78. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{x-16}$

79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(2+x)]-(1/2)}{x}$

80. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$

81. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}$

82. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{2x^2}$

83. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

84. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

En los ejercicios 85 a 88, encontrar $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

85. $f(x)=3x-2$

86. $f(x)=\sqrt{x}$

87. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$

88. $f(x)=x^2-4x$

En los ejercicios 89 y 90, utilizar el teorema del encaje para calcular $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

89. $c=0$

$4-x^2 \le f(x) \le 4+x^2$

90. $c=a$

$b-|x-a| \le f(x) \le b+|x-a|$

En los ejercicios 91 a 96, utilizar una herramienta de graficación para representar la función dada y las ecuaciones $y=|x|$ **y** $y=-|x|$ **en una misma ventana. Usando las gráficas para visualizar el teorema del encaje, calcular** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

91. $f(x)=x\cos x$

92. $f(x)=|x\operatorname{sen} x|$

93. $f(x)=|x|\operatorname{sen} x$

94. $f(x)=|x|\cos x$

95. $f(x)=x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

96. $h(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$

Desarrollo de conceptos

97. En el contexto del cálculo de límites, analizar qué se quiere decir mediante las funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

98. Elaborar un ejemplo de funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

99. ¿Qué se quiere decir con indeterminación o forma indeterminada?

100. Explicar el teorema del encaje.

101. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de

$$f(x)=x,\quad g(x)=\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad h(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$$\lim_{x\to 0} h(x)=1.$$

102. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = x,\ g(x) = \operatorname{sen}^2 x \ \text{y} \ h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Objeto en caída libre **En los ejercicios 103 y 104, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + 500$, que da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 500 pies. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

103. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿a qué velocidad estará cayendo luego de 5 segundos?

104. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿cuánto tiempo tardará ésta en llegar al suelo? ¿A qué velocidad se producirá el impacto?

Objeto en caída libre **En los ejercicios 105 y 106, utilizar la función de posición $s(t) = -4.9t^2 + 200$, que da la altura (en metros) de un objeto que cae desde una altura de 200 m. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

105. Determinar la velocidad del objeto cuando $t = 3$.

106. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

107. Encontrar dos funciones f y g tales que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existan, pero sí $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$, si existe.

108. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ tampoco existe.

109. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.1.

110. Demostrar la propiedad 3 del teorema 1.1. (Se puede utilizar la propiedad 3 del teorema 1.2).

111. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.2.

112. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$.

113. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ y $|g(x)| \le M$ para un número fijo M y todas las $x \ne c$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

114. *a)* Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$.

(*Nota*: Este ejercicio es inverso al del problema 112.)

b) Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$.

[*Sugerencia*: Utilizar la desigualdad $\big||f(x)| - |L|\big| \le |f(x) - L|$.]

115. ***Para pensar*** Encontrar una función f que muestre que el recíproco del ejercicio 114*b* no es verdadero. [*Sugerencia*: Buscar una función f tal que $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$, pero donde $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no exista.]

Para discusión

116. Sea $f(x) = \begin{cases} 3, & x \ne 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$. Encontrar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 117 a 122, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

117. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

118. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

119. Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales distintos a $x = 0$, y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L$.

120. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

121. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, donde $f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

122. Si $f(x) < g(x)$ para todas las $x \ne a$, entonces

$\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

123. Demostrar la segunda parte del teorema 1.9 probando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

124. Sean $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

y

$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$

Calcular (si es posible) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

125. ***Razonamiento gráfico*** Considerar $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$.

a) Determinar el dominio de f.

b) Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de f. ¿Resulta evidente el dominio de f a partir de la gráfica? Si no es así, explicar por qué.

c) Utilizar la gráfica f para calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

d) Confirmar la respuesta del apartado *c)* utilizando el método analítico.

126. ***Aproximación***

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

b) Utilizar el resultado del apartado anterior para obtener la aproximación $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ para x cercanas a 0.

c) Aplicar el resultado del apartado *b)* para estimar cos (0.1).

d) Utilizar una herramienta de graficación para estimar cos (0.1) con cuatro decimales. Comparar el resultado con el del apartado *c*).

127. ***Para pensar*** Al utilizar una herramienta de graficación para generar una tabla con el fin de estimar $\lim\limits_{x\to 0} [(\operatorname{sen} x)/x]$, un estudiante concluye que el límite, y no 1, era 0.01745. Determinar la probable causa del error.