CAPÍTULO 1

RELACIONES Y FUNCIONES

Reseña HISTÓRICA

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial.

Para el desarrollo de este proceso se contaba con el álgebra; las técnicas de cálculo; introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; problemas de cuadraturas y la búsqueda de tangentes. Las causas que motivaron este proceso fueron las exigencias de la mecánica newtoniana y la astronomía.

La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial.

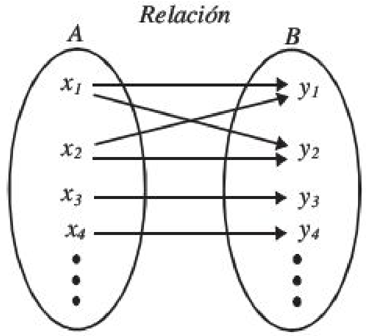
El cálculo diferencial surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma del cálculo de diferenciales de G. W. Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Relación

Regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Ejemplo



Esta relación se representa con el siguiente conjunto de pares ordenados

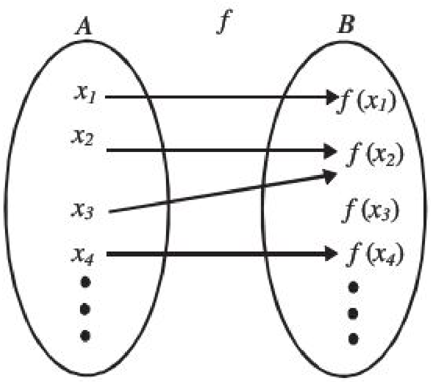
$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\ldots\}$$

Función

El concepto de función es uno de los más importantes en el mundo de las matemáticas. Las funciones no sólo representan fórmulas, o lugares geométricos, también se utilizan como modelos matemáticos que resuelven problemas de la vida real.

A continuación se dan algunas definiciones de función:

- Es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos. La cual a cada elemento del primer conjunto (dominio) le asocia un solo elemento del segundo conjunto (contradominio).
- Sean A y B dos conjuntos y f una regla que a cada $x \in A$ asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto B, se dice que f es una función que va del conjunto A al B, y se representa de la siguiente forma: $f: A \rightarrow B$, donde al conjunto A se le llama dominio y al B contradominio, que también se representa por medio de un diagrama de flechas:

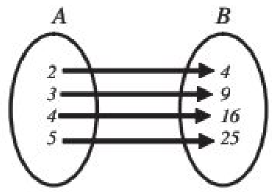


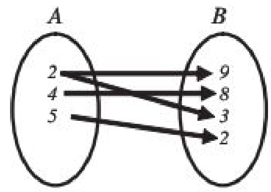
- Una función es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a una colección, entonces se cumple que $b = c$; es decir, en una función no puede haber dos pares con el mismo primer elemento.

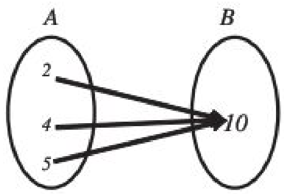
EJEMPLOS

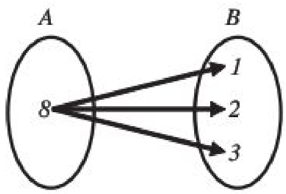
Ejemplos

1 Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación:

1.


2.


3.


4.


Solución

El primer y el tercer diagramas corresponden a una función ya que a cada elemento del conjunto A se le asigna un solo elemento del conjunto B.

En el segundo diagrama al menos a un elemento del conjunto A se le asignan dos elementos del conjunto B, mientras que en el cuarto diagrama el elemento 8 se asocia con tres elementos del conjunto B, por tanto, se concluye que estos conjuntos representan una relación.

2 Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

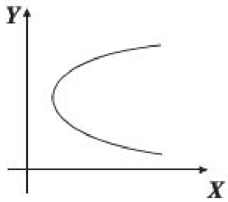
$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

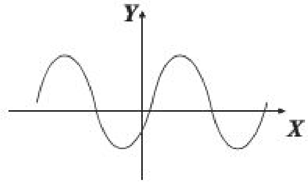
Solución

Los conjuntos A y C son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto B el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto M al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, B y M son relaciones.

Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje "Y" sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

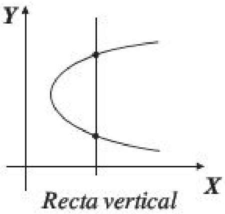
3 Determina si las siguientes gráficas representan una relación o una función.

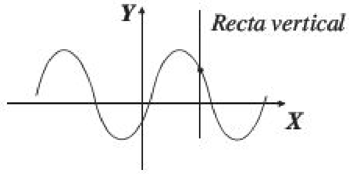
1. 

2. 

Solución

Se traza una recta vertical en ambas gráficas y se observa que en la primera interseca en dos puntos a la gráfica, por tanto, representa una relación y en la segunda, la recta vertical interseca en un punto a la gráfica, por consiguiente representa una función.

1. 

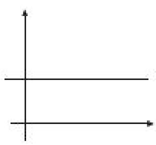
2. 

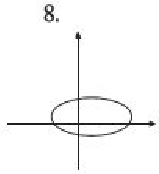
EJERCICIO 1

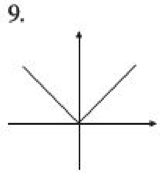
Identifica si los siguientes conjuntos representan funciones o relaciones.

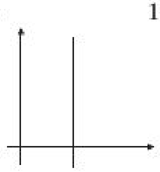
1. $\{(0, 3), (2, 3), (-1, 3)\ldots\}$
2. $\{(-3, 5), (3, 5), (-3, 2)\ldots\}$
3. $\{(4, 7), (-4, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, 5)\ldots\}$
4. $\{(2, 5), (\sqrt{4}, 2), (3, -3)\ldots\}$
5. $\{(a, 2a), (-2a, 3a), (4a, a)\ldots\}$
6. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{6}{4}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)\ldots\right\}$

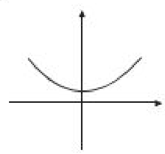
Identifica qué representa cada gráfica (función o relación):

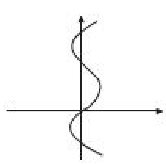
7. 

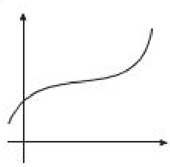
8. 

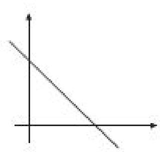
9. 

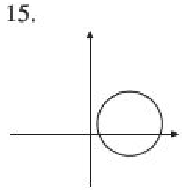
10. 

11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Notación

Una función se denota o escribe como $y = f(x)$, donde:

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

f: función, regla de asignación o correspondencia.

Clasificación

Las funciones se clasifican en: *algebraicas* y *trascendentes*

$$\text{Función}\begin{cases}\text{Algebraicas}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Inversas trigonométricas}\\ \text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos

Algebraicas

$f(x) = x^3 - 4x$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x-4}$ $\qquad$ $y = |x|$

$y = 3x^2 - 5x - 6$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $\qquad$ $g(x) = |x - 2| - 1$

Trascendentes

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(x) = e^{4x}$ $\qquad$ $s(t) = \ln(2t - 4)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $y = e^{\sqrt{x}} + 2$ $\qquad$ $g(x) = \log(x + 1)$

Las funciones algebraicas y trascendentes pueden ser:

- **Explícitas**
  Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

$y = x^2$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\qquad$ $y = \operatorname{sen} 3x$ $\qquad$ $s(t) = e^t$ $\qquad$ $y = \log x$

$y = x^3 - 1$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\qquad$ $f(x) = \cos \dfrac{1}{2}x$ $\qquad$ $g(x) = 2^{x+3}$ $\qquad$ $f(x) = \ln(3x)$

- **Implícitas**
  Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

$$x^2 - 8y + 16 = 0 \qquad x^3 + y^2 - 3x = 0 \qquad \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \qquad e^y = x + 3$$

Las funciones que se estudiarán en este libro siempre tomarán valores de números reales tanto para la variable independiente como para la dependiente.

Valor de una función

El valor real $f(x)$ de una función es aquel que toma y cuando se asigna a x un determinado valor real.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén $f(-3)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

Solución

Para obtener $f(-3)$ se sustituye $x = -3$ en la función y se realizan las operaciones indicadas,

$$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2 = 27 + 15 - 2 = 40$$

Por tanto $f(-3) = 40$, es decir $y = 40$ cuando $x = -3$ o lo que es lo mismo, la curva pasa por el punto $(-3, 40)$ en el plano cartesiano.

2 Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{5-x}$, encuentra $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{3}{4}$ en la función y se realizan las operaciones:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}\text{, por tanto, cuando } x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{17}$$

3 Si $s(t) = \sqrt{t-5}$, determina $s(4)$, $s(a+5)$

Solución

$s(4) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$, la función no está definida para $t = 4$, $\sqrt{-1}$ no tiene solución real

$$s(a+5) = \sqrt{a+5-5} = \sqrt{a}$$

4 Si $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, determina $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{\pi}{3}$, en $f(x)$ y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5 Determina $\dfrac{f(a+b) - f(a)}{b}$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Se obtiene que $\qquad f(a+b) = \sqrt{a+b}$ y $f(a) = \sqrt{a}$

Se sustituyen los valores obtenidos:

$$\frac{f(a+b) - f(a)}{b} = \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{b}$$

Un resultado equivalente se obtiene al racionalizar el numerador:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{b\cdot\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b}{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$$

Finalmente, el resultado de $\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

6 Si $y=\frac{x}{x+2}$, encuentra el valor de y cuando $x=-2$

Solución

Al evaluar la función en $x=-2$, se obtiene:

$$y=\frac{-2}{-2+2}=-\frac{2}{0}$$

La función no está definida para $x=-2$, ya que la división entre cero no está determinada.

7 Si $f(x)=x^2-1$, demuestra que $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

Demostración

Se sustituye $\frac{1}{x}$ en la función:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{-\left(-1+x^2\right)}{x^2}=-\frac{x^2-1}{x^2}$$

Pero $x^2-1=f(x)$

Por tanto, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

EJERCICIO 2

Evalúa las siguientes funciones:

1. Si $f(x)=2x^2-3$, obtén $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(3)$, $f(0)$
2. Si $f(x)=x^2-5x+6$, determina $f(a)$, $f(a+b)$
3. Si $f(x)=3x^2+4x-2$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Si $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$, determina $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(x+h)-f(x)$
5. Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$, determina $f(5)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(3)$
6. Si $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

7. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, determina $\dfrac{f(x+b)-f(x)}{b}$

8. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, determina $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9. Si $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x+2}$, determina $f(1)$, $f(0)$, $f(x+5)$

10. Si $f(x) = -3x^2 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$, determina $f(-1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

11. Si $f(x) = x^2 - 3x$, demuestra que $f(3x) - f(x-1) = 4(x-1)(2x+1)$

12. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

13. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

14. Si $f(x) = \tan x$, demuestra que $f(x) = f(x+3\pi)$

15. Si $f(x) = \cos 2x$, demuestra que $f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -f(x)$

16. Demuestra que para $f(x) = \sqrt{x-2}$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{f(x+h)+f(x)}$

17. Si $h(x) = \sqrt{x^2-4}$, $r(x) = \sqrt{x^2+4}$, demuestra que $h\left(n+\dfrac{1}{n}\right) + r\left(n-\dfrac{1}{n}\right) = 2n$

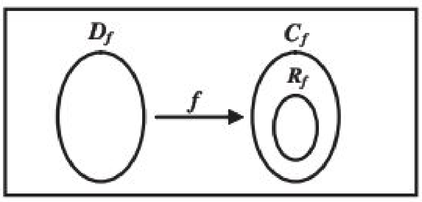
18. Si $f(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, demuestra que $\dfrac{f(m)-f(n)}{1+[f(m)][f(n)]} = \dfrac{m-n}{1+mn}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dominio, contradominio y rango de una función

Dada una función $f: A \rightarrow B$, se dice que el conjunto A es el **dominio** (D_f) y B el **contradominio** (C_f) o codominio de f. En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para X mientras que el contradominio corresponde a los valores posibles para Y.

- **Rango (R_f)**
  Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de x.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

Solución

La función es polinomial, x puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

2 Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

Solución

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

3 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x - 6}$?

Solución

Al factorizar el denominador se obtiene: $f(x) = \dfrac{x}{(x-6)(x+1)}$, el denominador se hace cero para

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -1, D_f = \{x \in R \mid x \neq -1, x \neq 6\} \quad \text{o bien} \quad \{x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 6) \cup (6, \infty)$$

4 Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-5}$

Solución

El radicando debe ser mayor o igual a cero (ya que no hay valor real para raíces cuadradas de números negativos) es decir $x - 5 \geq 0$, de donde $x \geq 5$, por tanto $D_f = \{x \in R \mid x \geq 5\}$ o bien $x \in [5, \infty)$

5 Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Solución

Se plantea la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, al resolverla se obtiene que el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq 4\}$ o bien $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

6 Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 3)$

Solución

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve:

$$2x - 3 > 0 \;\rightarrow\; 2x > 3 \;\rightarrow\; x > \frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio es el conjunto $D_f = \left\{x \in R \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$, o bien, $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

7 Encuentra el rango de la función $f(x) = \frac{6x+1}{1+3x}$

Solución

Se despeja x:

$$y = \frac{6x+1}{1+3x} \rightarrow y(1+3x) = 6x+1 \rightarrow y + 3xy = 6x + 1$$

$$3xy - 6x = 1 - y \rightarrow 3x(y-2) = 1 - y \rightarrow x = \frac{1-y}{3(y-2)}$$

El denominador se hace cero cuando $y = 2$, por tanto el rango es el conjunto:

$$R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o bien, } y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

8 Determina el rango de la función $y = \sqrt{9-x^2}$

Solución

$y \geq 0$, porque la raíz es positiva o cero, se despeja x:

$$y = \sqrt{9-x^2} \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 = 9 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{9-y^2}$$

Se plantea la desigualdad $9 - y^2 \geq 0$, al resolverla se obtiene que $y \in [-3, 3]$, pero $y \geq 0$, por tanto, el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 3\}$, o bien, $y \in [0, 3]$

EJERCICIO 3

Determina el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = 3x^3 - 2$
3. $f(x) = \frac{x}{x+3}$
4. $f(x) = \frac{x-4}{5-x}$
5. $f(x) = \frac{3}{x^2-16}$
6. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2-7x+10}$
8. $f(x) = \frac{x-1}{25-x^2}$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \frac{x-3}{2x^2+10x}$
11. $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$
12. $f(x) = \sqrt{x+1}$
13. $f(x) = \sqrt{x-6}$
14. $f(x) = \sqrt{2-x}$
15. $f(x) = \sqrt{12-3x}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$
17. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
18. $f(x) = \sqrt{36-x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{9+x^2}$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

21. $f(x) = \sqrt[4]{x-5}$

22. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

24. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-3}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x-3}}$

27. $f(x) = \log(3x+6)$

28. $f(x) = \ln(5-2x)$

29. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

30. $f(x) = \log(3+2x-x^2)$

Determina el rango de las siguientes funciones:

31. $f(x) = x^2 + 1$

32. $f(x) = x^2 - 4$

33. $f(x) = 9 - x^2$

34. $f(x) = 3x - x^2$

35. $f(x) = \dfrac{10x-1}{3-5x}$

36. $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x+1}$

37. $y = \sqrt{x^2+1}$

38. $y = -\sqrt{2-x}$

39. $y = \sqrt{4-x^2}$

40. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

42. $y = |x-4|$

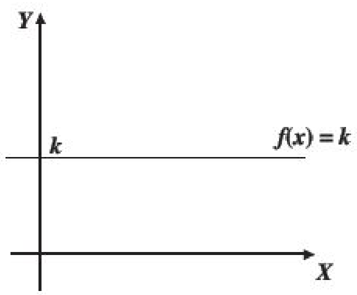
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Algunos tipos de funciones

Función constante

$f(x) = k$ con $k \in R$ representa una recta paralela al eje "X" sobre k.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = \{k\}$



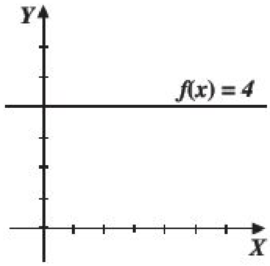
Ejemplo

Obtén la gráfica de $f(x) = 4$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X sobre $y = 4$

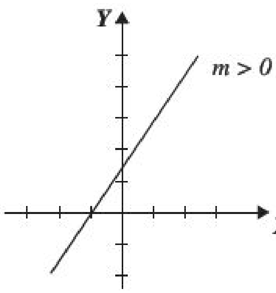
$$D_f = R \qquad R_f = \{4\}$$

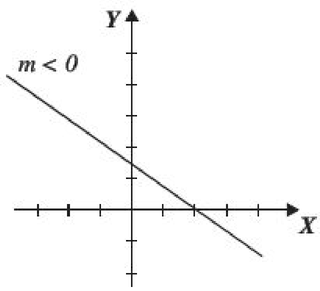


Función lineal

Esta función tiene la forma $f(x) = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$, Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$





Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto $(0, b)$.

II. A partir de este punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la función $y = \frac{2}{3}x + 4$

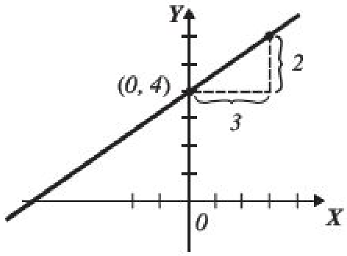
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$

Gráfica de la función



2 Traza la gráfica de la función $y = -\frac{4}{5}x + 2$

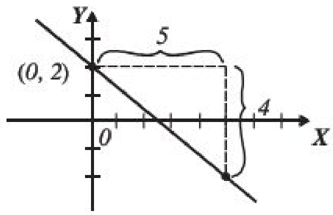
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = -\frac{4}{5}x + 2$$

$$m = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 2, \text{ representa el punto } (0, 2)$$

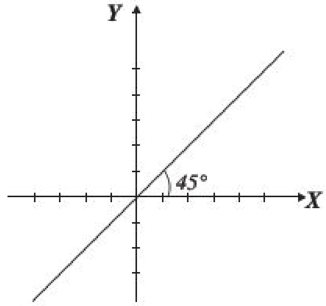
Gráfica de la función



Función identidad

Es la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m = 1$ y $b = 0$, es decir: $f(x) = x$

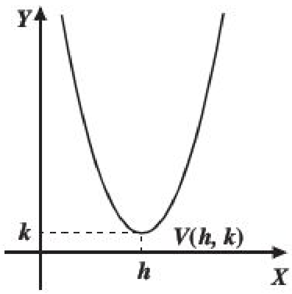
Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$

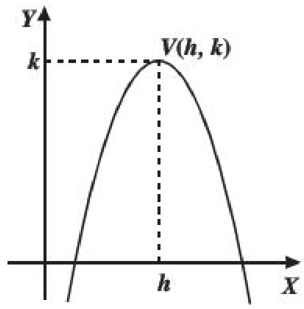


Función cuadrática

Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo

Si $a > 0$ Si $a < 0$





$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right)$ Rango: $y \in \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$

Para obtener las coordenadas (h, k) del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a},\ k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Ejemplo

Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Solución

Se identifican los valores de los coeficientes de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$

$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba

Se calculan los valores de h y k:

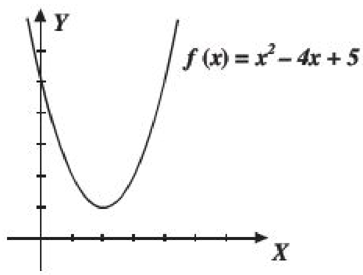
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2; \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(5) - (-4)^2}{4(1)} = 1$$

El vértice es el punto $V(2, 1)$ y el dominio y rango son:

$$D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad y \in \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right) = [1, \infty)$$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de x menores y mayores que 2

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5



La función $f(x) = x^n$

Con "n" entero positivo tiene como: Dominio $x \in (-\infty, \infty)$ es decir el conjunto de los reales R y Rango:

$$\begin{cases} y \in [0, \infty) & \text{si } n \text{ es par} \\ y \in (-\infty, \infty) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

EJEMPLOS

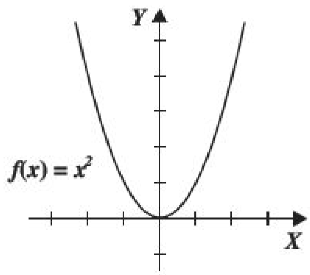
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$

Solución

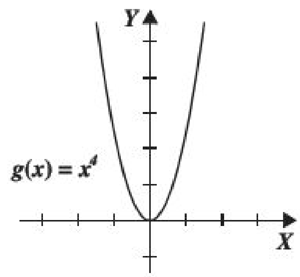
Se tabula con valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4



Al graficar se obtiene:

x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^4$	$\frac{81}{16}$	1	0	1	$\frac{81}{16}$

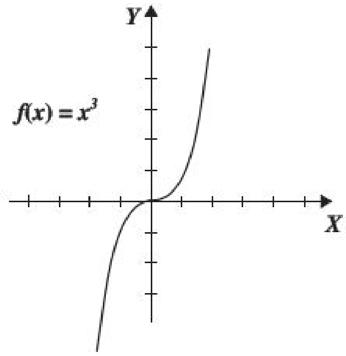


2 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^5$

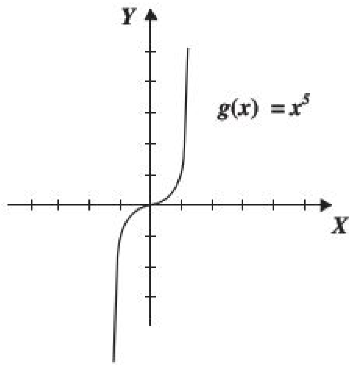
Solución

Se tabula para valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^3$	−8	−1	0	1	8



x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^5$	$-\frac{243}{32}$	−1	0	1	$\frac{243}{32}$



Función racional

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0$$

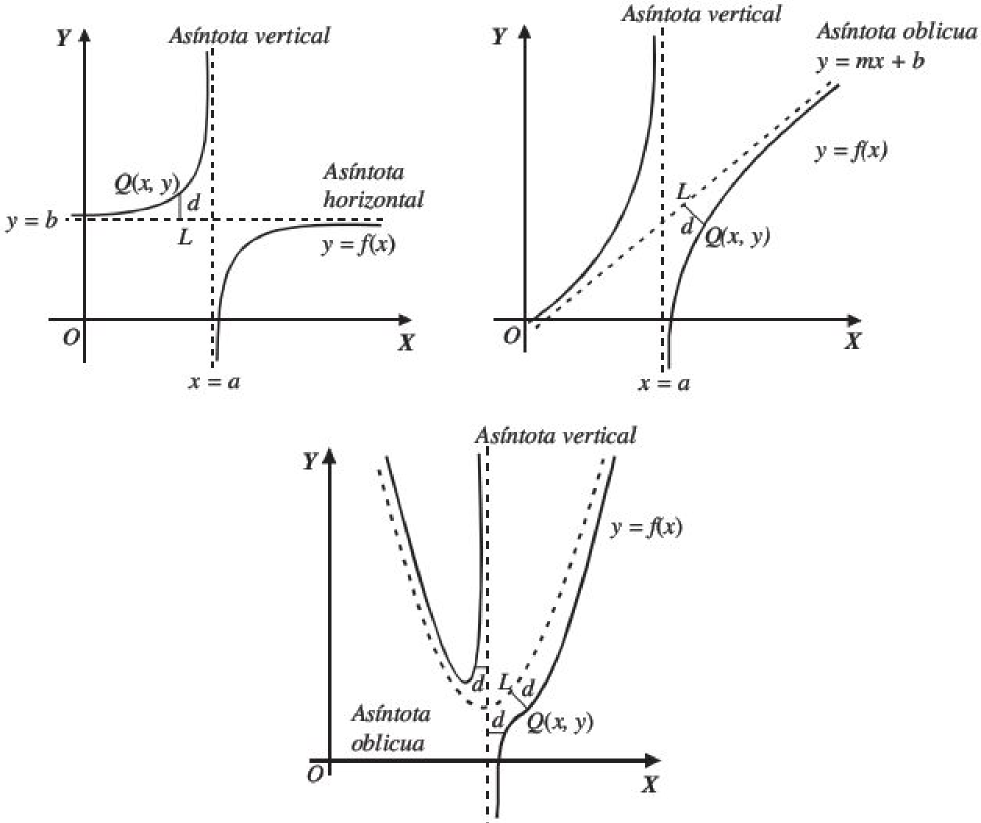
Definición de asíntota

Si la distancia d entre una recta o curva L y el punto móvil $Q(x, y)$ de la función tiende a cero, entonces la recta o curva recibe el nombre de asíntota.

Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Cuando la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la curva o recta $L(x)$ y la distancia d entre un punto de $f(x)$ y la curva o recta $L(x)$ tiende a cero (es decir la gráfica no toca a $L(x)$), entonces $L(x)$ recibe el nombre de asíntota.

Ejemplos



En este capítulo sólo se estudiarán las asíntotas horizontales y verticales.

- **Asíntotas verticales**

  Una función de la forma $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tiene asíntotas verticales si existen valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tal que se cumple lo siguiente:

$$Q(x_1) = Q(x_2) = \ldots = Q(x_n) = 0$$

- **Asíntotas horizontales**

  Se despeja la variable independiente x, si se obtiene una función de la forma $G(y) = \dfrac{R(y)}{S(y)}$, tal que para los valores de $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ se cumpla que:

$$S(y_1) = S(y_2) = \ldots = S(y_n) = 0$$

EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución

El dominio de la función está dado por el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$, teniendo una asíntota en $x = 0$, es decir el eje vertical del plano.

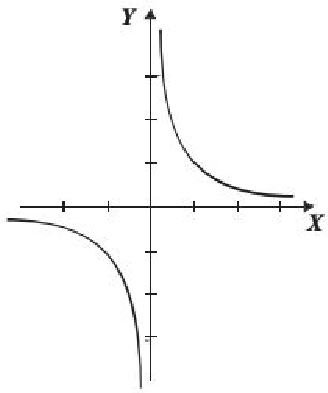
Al despejar x se obtiene $x = \frac{1}{y}$

De la cual se deduce que el rango está dado por $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, es decir el eje horizontal del plano.

Si tabulas para valores de x diferentes de cero obtienes:

x	−3	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f(x)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	−3	no existe	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Se grafican las asíntotas y se localizan los puntos en el plano, se unen y se observa cómo la curva se acerca a las asíntotas sin tocarlas, haciendo la distancia entre la curva y las rectas cada vez más pequeña.



2 Determina el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = \frac{2x-3}{x+2}$

Solución

El denominador debe ser diferente de cero,

$$x + 2 \neq 0, \text{ entonces } x \neq -2$$

Por tanto, el dominio está dado por:

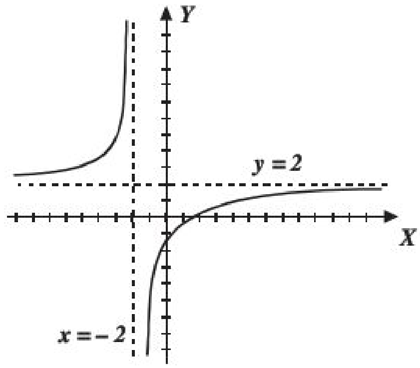
$$D_f = \{x \in R \mid x \neq -2\} \text{ o } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \text{ y la asíntota vertical es } x = -2$$

Al despejar x se obtiene el rango y la asíntota horizontal:

$$y = \frac{2x-3}{x+2}, \text{ entonces } x = \frac{2y+3}{2-y} \text{ donde } 2 - y \neq 0 \rightarrow y \neq 2$$

Por tanto, el $R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\}$ y la asíntota horizontal es $y = 2$

Gráfica: Se trazan las asíntotas y mediante una tabulación se obtienen los pares ordenados, los cuales forman la siguiente curva:



Función raíz cuadrada

La función está dada por: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con $g(x) \geq 0$

EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

Solución

Para determinar el dominio se resuelve la desigualdad: $x + 2 \geq 0$ donde $x \geq -2$, entonces el dominio es el conjunto: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$ o $x \in [-2, \infty)$

El rango se obtiene despejando x

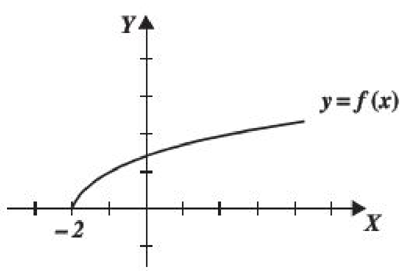
$$y = \sqrt{x+2} \quad \rightarrow \quad y^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x = y^2 - 2$$

La función es una raíz positiva, o cero, es decir $y \in [0, \infty)$ y el despeje da como resultado una expresión polinomial donde $y \in R$, por tanto el rango está definido para $y \in [0, \infty)$

Al tabular dando algunos valores en el intervalo $x \in [-2, \infty)$ se obtiene:

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

La gráfica que se obtiene es:



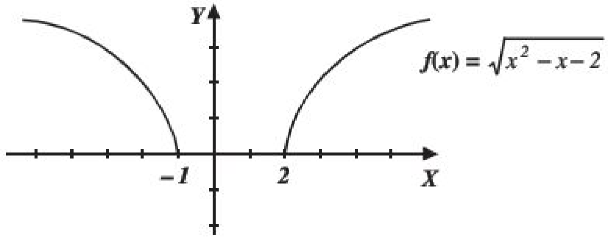
2 Determina la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x^2 - x - 2 \geq 0$, obteniendo que

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

Al despejar x se obtiene, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4y^2 + 9}}{2}$ donde $y \in (-\infty, \infty)$, $f(x)$ es una raíz positiva, o cero, por tanto el rango es: $y \in (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$



3 Grafica la función $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, obteniendo que:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

Al despejar x para obtener el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y^2 = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow y^2(x+1) = x - 1 \rightarrow y^2x + y^2 = x - 1$$

$$y^2x - x = -1 - y^2$$

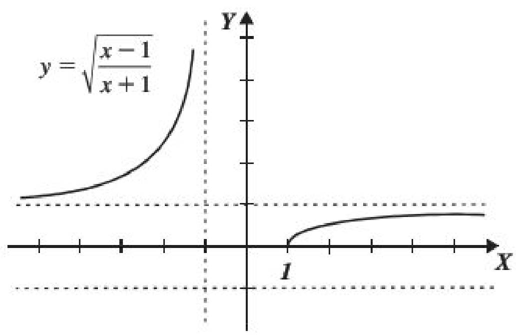
$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2$$

$$x = \frac{-1 - y^2}{y^2 - 1}, \text{ donde } y \neq \pm 1.$$

La función es una raíz positiva, por tanto, $y \in [0, \infty)$, entonces el rango corresponde a:

$$y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y dos horizontales en $y = -1$, $y = 1$, al graficar se obtiene:



Nota: Observe que gráficamente $y = -1$ no es asíntota.

Función valor absoluto

La función es $f(x) = |g(x)|$, donde $x \in D_g$ y $f(x) \geq 0$.

EJEMPLOS

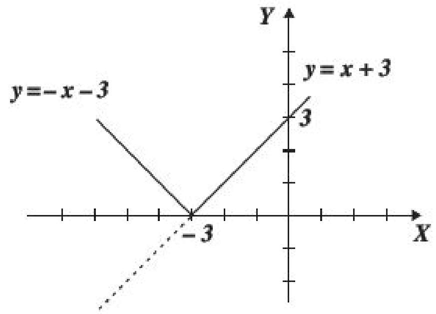
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de $f(x) = |x + 3|$.

Solución

Se parte de la definición de valor absoluto, en la que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$, se obtienen las siguientes igualdades: $y = x + 3$, $y = -x - 3$, las cuales son dos rectas donde el dominio son los números reales y el rango está dado por $y \in [0, \infty)$

La gráfica que se obtiene es:



2 Obtén la gráfica de $f(x) = \left|\frac{2}{x}\right|$.

Solución

$\frac{2}{x}$, está definido para $x \neq 0$, por tanto el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ o bien

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

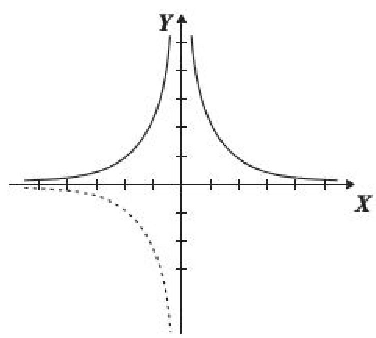
Para el rango se despeja x de las igualdades que se obtienen al aplicar la definición de valor absoluto.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0, \qquad y = -\frac{2}{x} \rightarrow x = -\frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0$$

También se toma el hecho de que $f(x) > 0$, ya que $\left|\frac{2}{x}\right| > 0$, por tanto el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid y > 0\}$ o bien $y \in (0, \infty)$.

La asíntota horizontal es $y = 0$, mientras que la vertical es la recta $x = 0$.

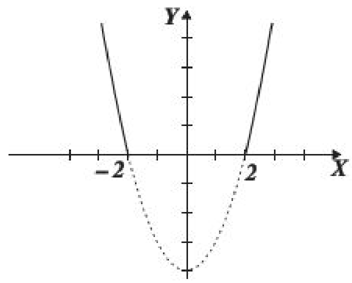
Luego la gráfica que se obtiene es:



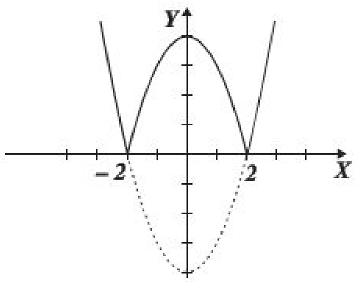
3 Obtén la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$.

Solución

$y = x^2 - 4$ es una función cuadrática con dominio $x \in R$ y rango $y \in [-4, \infty)$, teniendo como gráfica:



$f(x) \geq 0$, luego el rango de la función es: $y \in [0, \infty)$, por tanto, al hacer positiva la parte donde $x^2 - 4$ es negativa se obtiene la siguiente gráfica:



4 Obtén el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

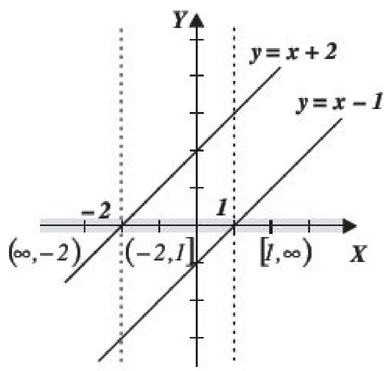
Solución

Dominio: Para $y = \frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, por tanto el dominio de la función está dado por:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

Rango: $f(x) > 0$, por tanto, el rango está dado por $y \in [0, \infty]$, pero al despejar "x" se obtiene $x = \frac{1-2y}{y-1}$, entonces $y \neq 1$, por tanto $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica 1

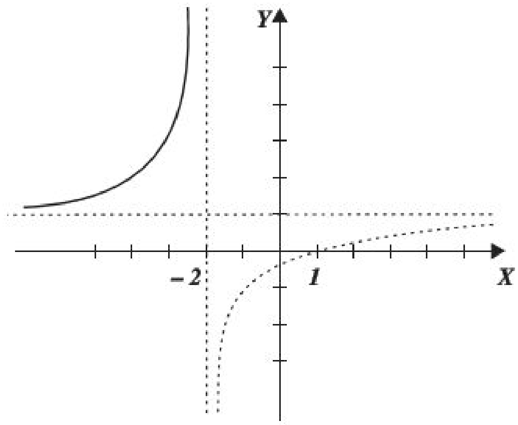


En la gráfica 1 se muestran los intervalos que se analizarán para construir la gráfica que se propone.

i) En el intervalo $(-\infty, -2)$ las rectas $y = x - 1$, $y = x + 2$, toman valores negativos, es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{-(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

La porción de gráfica en el intervalo $(-\infty, -2)$ es:



ii) En el intervalo $(-2, 1]$

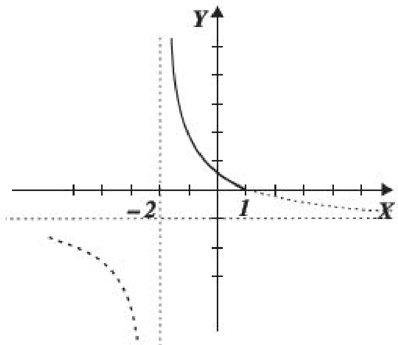
$y = x - 1$ toma valores negativos

$y = x + 2$ los toma positivos

es decir:

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{+(x+2)} = \frac{1-x}{x+2}$$

La porción de gráfica es:



iii) En el intervalo $[-1, \infty)$

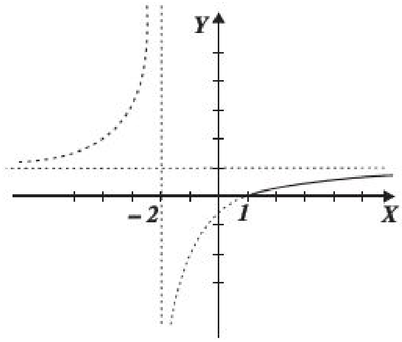
$$y = x - 1, y = x + 2$$

toma valores positivos es decir

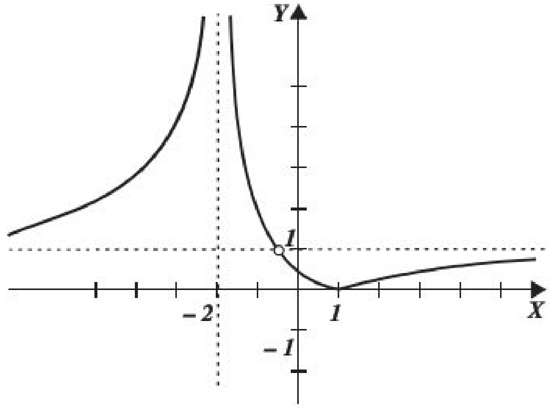
$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{+(x-1)}{+(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Tiene la misma gráfica que en el caso i)

La porción de gráfica es:



Finalmente, la gráfica es la unión de las porciones de gráfica en cada intervalo.



Nota: En la gráfica aparece un hueco en $y = 1$ ya que el rango es $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Función mayor entero

Tiene la forma: $f(x) = [x]$ con la propiedad de que $[x] = n$ para todo $n \leq x < n + 1$, con $n \in Z$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de: $f(x) = [x]$

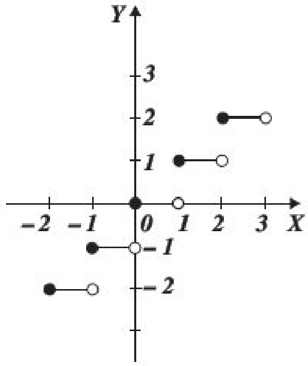
Dominio: $D_f = \{x \mid x \in R\}$

Rango: $R_f = \{y \mid y \in Z\}$

Se toma un subconjunto del dominio por ejemplo $x \in [-2, 3]$ se tiene que:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Gráfica:



También recibe el nombre de función escalón.

2 Traza la gráfica de $f(x) = \left[\frac{2}{3}x\right]$

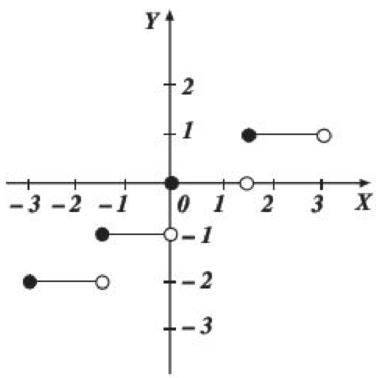
Solución

El dominio y el rango de la función se definen:

$$D_f = \{x \mid x \in R\} \text{ y } R_f = \{y \mid y \in Z\}$$

Se elige el subconjunto del dominio $x \in [-2, 2]$ entonces:

	Longitud del escalón	f(x)
$-2 \leq \frac{2}{3}x < -1$	$-3 \leq x < -\frac{3}{2}$	-2
$-1 \leq \frac{2}{3}x < 0$	$-\frac{3}{2} \leq x < 0$	-1
$0 \leq \frac{2}{3}x < 1$	$0 \leq x < \frac{3}{2}$	0
$1 \leq \frac{2}{3}x < 2$	$\frac{3}{2} \leq x < 3$	1



EJERCICIO 4

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = -\frac{2}{5}$
3. $f(x) = \pi$
4. $f(x) = 3x + 5$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
6. $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$
7. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
8. $f(x) = -2x^2 + 12x - 13$
9. $f(x) = 4 - x^2$
10. $y = \frac{3}{x}$
11. $f(x) = -\frac{1}{x}$
12. $f(x) = \frac{x}{x-2}$
13. $y = \frac{x-2}{x+4}$
14. $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$
15. $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$
16. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$
17. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-9}$
18. $f(x) = \sqrt{-x}$
19. $y = \sqrt{x-4}$
20. $y = -\sqrt{9-x}$
21. $y = \sqrt{x^2-36}$
22. $y = \sqrt{16-x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
24. $f(x) = \sqrt{4x^2-9}$
25. $f(x) = \sqrt{\frac{900-100x^2}{9}}$
26. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
27. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$
28. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$
29. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$
30. $f(x) = |x|$
31. $f(x) = |x - 2|$
32. $f(x) = |x + 4|$
33. $f(x) = |x^2 - 1|$
34. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
35. $f(x) = |2 - x^2|$
36. $f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right|$
37. $f(x) = \left|\frac{2}{3-x}\right|$
38. $f(x) = \left|\frac{x+3}{x-3}\right|$
39. $f(x) = \left|\frac{x-3}{x+1}\right|$
40. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$
41. $f(x) = \left[\frac{5}{3}x\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función característica

Son funciones que están seccionadas por intervalos y en cada intervalo se presenta una función distinta. Para graficarla basta con dibujar la gráfica de cada una de las funciones en el intervalo dado.

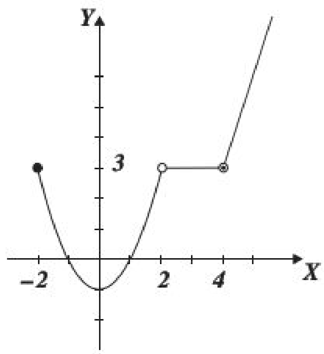
Ejemplo

Obtén la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 3x - 9 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución

Se tabula cada una de las funciones en el intervalo dado, se localizan los puntos y se grafican, observa que hay puntos que no están incluidos, para esos valores se coloca un círculo abierto.



EJERCICIO 5

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$ Recuerda que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

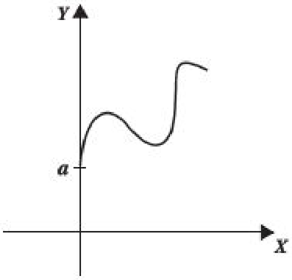
Gráfica de una función a partir de otra conocida

Algunas funciones se grafican a partir de que se conoce la gráfica de otra, a través de desplazamientos, alargamientos o reflexiones de esta última.

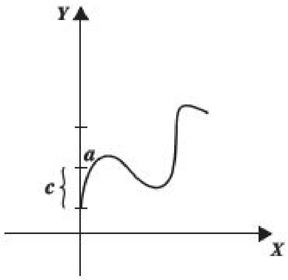
Desplazamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 0$ y $b > 0$, si:

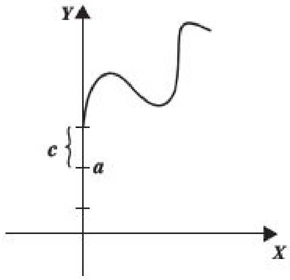
a) $y = f(x) + c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia arriba.
b) $y = f(x) - c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia abajo.
c) $y = f(x + c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda.
d) $y = f(x - c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades a la derecha.
e) $y = f(x + c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia arriba.
f) $y = f(x + c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia abajo.
g) $y = f(x - c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba.
h) $y = f(x - c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo.



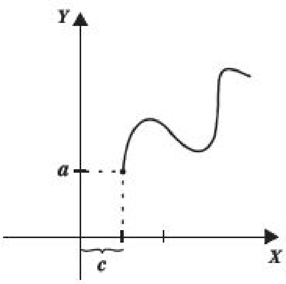
$f(x)$



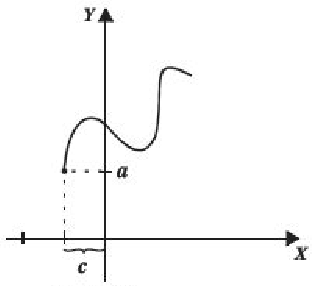
$f(x) - c$



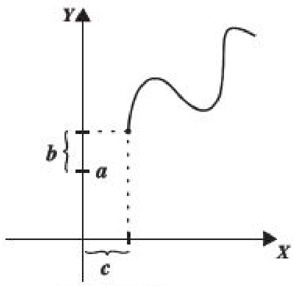
$f(x) + c$



$f(x - c)$



$f(x + c)$



$f(x - c) + b$

Alargamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 1$, si:

a) $y = cf(x)$, se alarga verticalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

b) $y = \frac{1}{c}f(x)$, se comprime verticalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

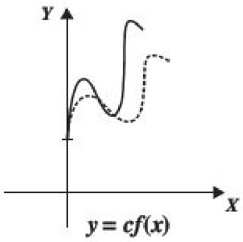
c) $y = f(cx)$, se comprime horizontalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

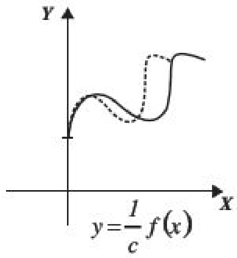
d) $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$, se alarga horizontalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

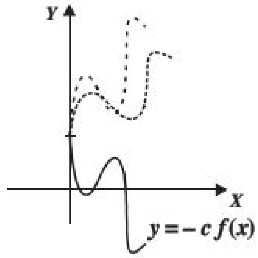
Reflexiones verticales y horizontales

Sea $f(x)$ una función si:

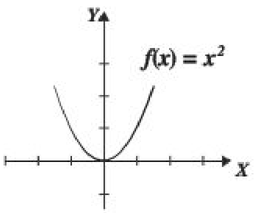
1. $y = -f(x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X.
2. $y = f(-x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje Y.

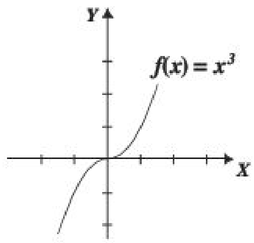


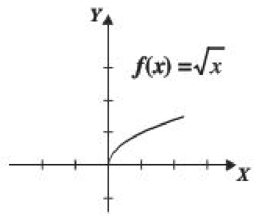


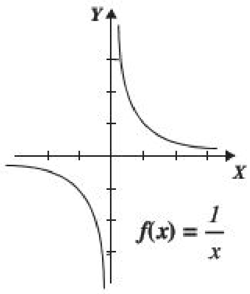


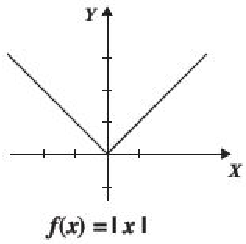
Se tomarán como base las siguientes funciones para graficar otras de la misma forma:











EJEMPLOS

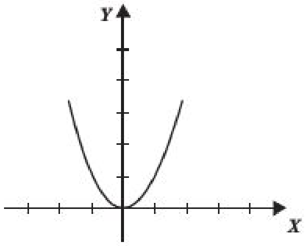
Ejemplos

1 Con base en la función $f(x) = x^2$, obtén la gráfica de: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$,

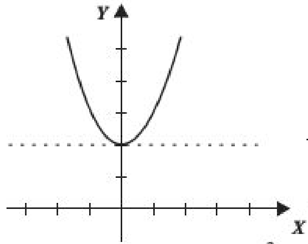
$$y = (x-2)^2,\ y = (x+2)^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = -x^2,\ y = x^2 - 2x - 3$$

Solución

$f(x) = x^2$

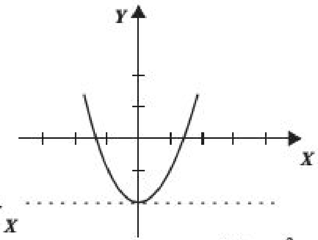


$y = x^2 + 2$



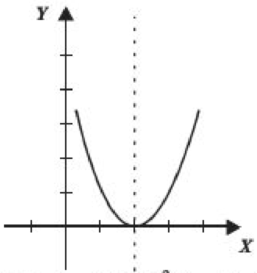
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba

$y = x^2 - 2$



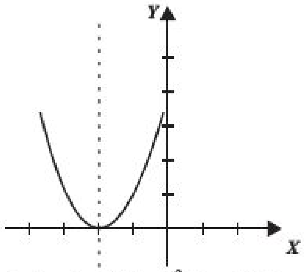
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia abajo

$y = (x-2)^2$



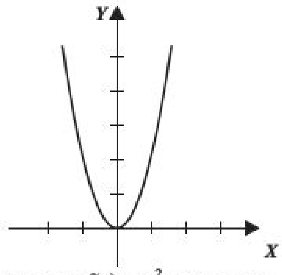
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la derecha

$y = (x+2)^2$



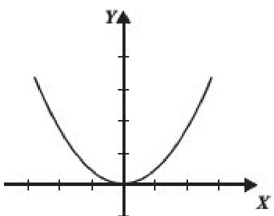
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda

$y = 2x^2$



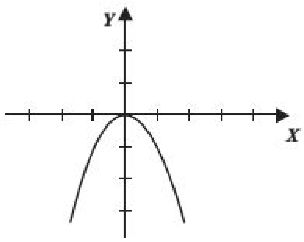
Se alarga $f(x) = x^2$ verticalmente dos veces

$y = \frac{1}{2}x^2$



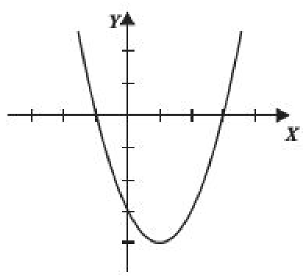
Se comprime $f(x) = x^2$ a la mitad verticalmente

$y = -x^2$



Se refleja $f(x) = x^2$ con respecto al eje X

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

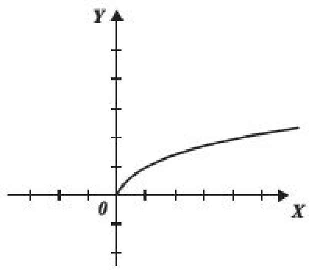


Se desplaza $f(x) = x^2$ hacia la derecha una unidad y baja cuatro unidades

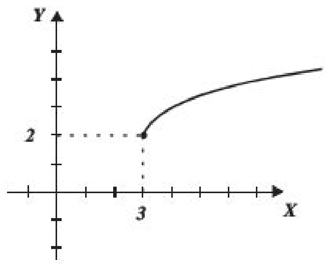
2 Determina la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

Solución

La gráfica de $y = \sqrt{x}$ es:



Para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, se toma la gráfica de $y = \sqrt{x}$, ésta se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba



EJERCICIO 6

Utiliza desplazamientos, alargamientos o reflexiones para obtener la gráfica de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = (x + 3)^2$
3. $y = 1 - x^2$
4. $y = x^2 - 6x + 10$
5. $y = 3x^2 + 12x + 11$
6. $y = -x^3$
7. $y = x^3 + 1$
8. $y = (x - 1)^3 + 2$
9. $y = \frac{1}{2}x^3 - 2$
10. $y = \sqrt{x-2} + 2$
11. $y = \sqrt{x-3} - 2$
12. $y = -\sqrt{x+3}$
13. $y = |x - 3| - 2$
14. $y = 3 - |x + 4|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones creciente y decreciente

Una función es **creciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

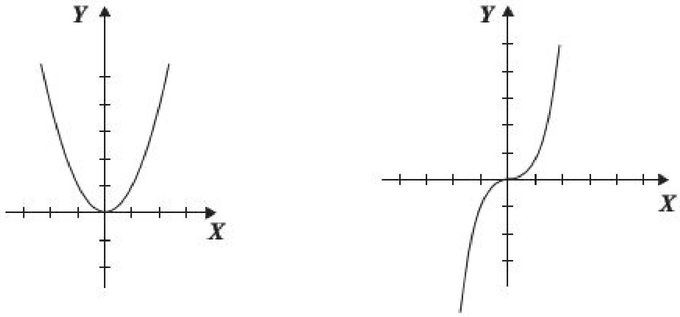
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

Una función es **decreciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

Ejemplos

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ son:



La función $f(x) = x^2$, es decreciente en el intervalo de $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que $g(x) = x^3$ es creciente para toda x de su dominio.

EJERCICIO 7

Con las funciones conocidas determina el intervalo donde crecen o decrecen:

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = \sqrt{x-2}$
6. $f(x) = -\sqrt{x+3}$
7. $f(x) = 9 - x^2$
8. $f(x) = |x - 3| - 2$
9. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
10. $f(x) = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva

Función inyectiva (uno a uno)

Si $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 \neq x_2$, f es una función inyectiva si y solo si $f(x_1) \neq f(x_2)$, o dicho de otra forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$ si y solo si $x_1 \neq x_2$.

Se determina si la *función es inyectiva* al trazar una recta paralela al eje X sobre la gráfica y si toca un solo punto es inyectiva. También se puede decir que una función inyectiva es aquella que siempre es creciente o siempre decreciente.

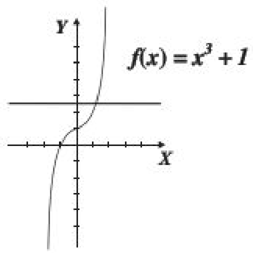
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$, es inyectiva.

Solución

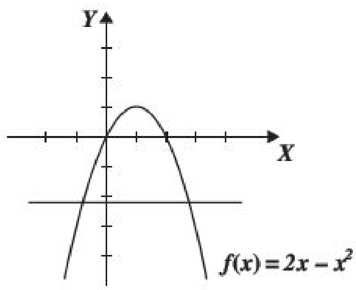
Sean $x_1 \neq x_2$, se tiene que $(x_1)^3 + 1 \neq (x_2)^3 + 1$, ya que no hay números distintos cuyos cubos sean iguales, con este resultado podemos afirmar que la función es inyectiva; por otro lado, si se observa que la gráfica es creciente, por tanto, es inyectiva. Otra forma de saber si la función es inyectiva es trazar cualquier recta paralela al eje X, y ésta debe tocar un solo punto de la gráfica.



2 Determina si la función $f(x) = 2x - x^2$ es inyectiva.

Solución

No es inyectiva, ya que para $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ se obtiene que $f(x_1) = f(x_2) = -3$, lo que contradice la definición. Luego, si se traza una recta paralela al eje X, se observa que ésta toca dos puntos de la gráfica; por otro lado, no es una función que sea creciente ni decreciente siempre.



Función suprayectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es suprayectiva o sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; es decir, para todo elemento de B siempre hay uno de A al cual fue asignado.

Otra forma de reconocer una función suprayectiva es si su contradominio es igual a su rango. Al menos que se indique lo contrario el contradominio de las funciones dadas serán los números reales.

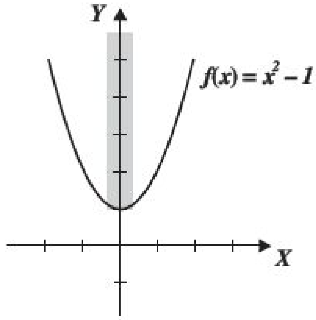
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es suprayectiva.

Solución

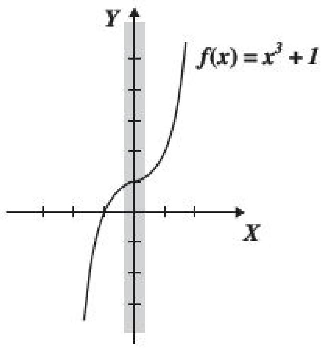
El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $[1, \infty)$, por tanto, la función no es suprayectiva.



2 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$ es suprayectiva

Solución

El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $(-\infty, \infty)$, por tanto, la función es suprayectiva.



Función biyectiva

Una función "f" es *biyectiva* si es *inyectiva* y *suprayectiva*.

EJEMPLOS

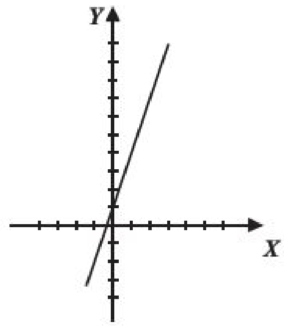
Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = 3x + 1$ es biyectiva.

Solución

Es una función siempre creciente, por tanto, es inyectiva. El contradominio de la función es $(-\infty, \infty)$ y su rango $(-\infty, \infty)$ entonces es suprayectiva.

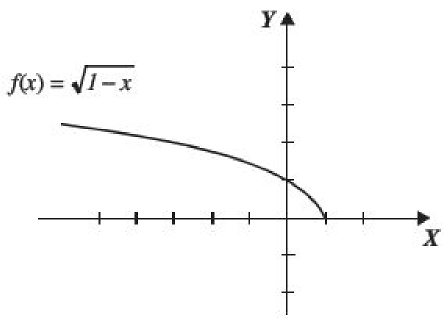
La función es inyectiva y suprayectiva, por tanto, es biyectiva.



2 Determina si la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

Gráfica



Si al trazar una recta paralela al eje X interseca a la curva en un punto es inyectiva; no es suprayectiva, ya que su contradominio son los reales y su rango es el intervalo $[0, \infty)$. Es inyectiva pero no suprayectiva, entonces no es biyectiva.

3 Determina si la función $f: (-\infty, 1] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

La gráfica es la misma de la función del ejemplo anterior, por tanto, la función es inyectiva.

En este caso se especifica el contradominio como el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, entonces, es suprayectiva.

Es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.

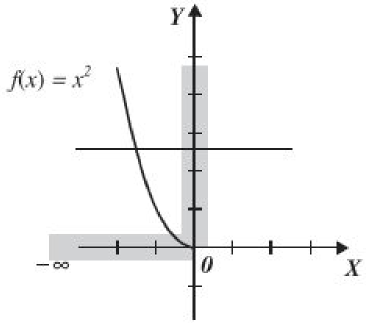
4 Determina si la función $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$ es biyectiva.

Solución

De la gráfica se observa que la función es inyectiva, ya que la recta horizontal sólo toca un punto.

Por otro lado, el contradominio es el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, por tanto, es suprayectiva.

Por último, es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.



EJERCICIO 8

Indica cuál de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 3$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^2, x \in [0, \infty)$
6. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
7. $f(x) = 2x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x-3}$
9. $f: R \rightarrow [-1, \infty)$, tal que $f(x) = x^2 - 1$
10. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = |x|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, con dominio: $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 7x + 10$, y $g(x) = x - 5$

Determina

a) $f(x) + g(x)$
b) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de f y g para efectuar las operaciones.

$$D_f : (-\infty, \infty), D_g : (-\infty, \infty)$$

a) $f(x) + g(x) = (x^2 - 7x + 10) + (x - 5)$
$= x^2 - 6x + 5$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

b) $f(x) - g(x) = (x^2 - 7x + 10) - (x - 5)$
$= x^2 - 8x + 15$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

c) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 7x + 10)(x - 5)$
$= x^3 - 7x^2 + 10x - 5x^2 + 35x - 50$
$= x^3 - 12x^2 + 45x - 50$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-5} = x - 2$ con, $\{x \in D_f \cap D_g \,|\, x \neq 5\}$

2 Sean las funciones $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = x$ determina: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de las funciones: D_f: $[-3, 3]$, D_g: $(-\infty, \infty)$ y se realizan las operaciones.

$f(x) + g(x) = \sqrt{9 - x^2} + x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) - g(x) = \sqrt{9 - x^2} - x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{9 - x^2} \cdot x = x\sqrt{9 - x^2}$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$, con dominio: $\{x \in [-3, 3] | x \neq 0\}$ o bien $x \in [-3, 0) \cap (0, 3]$

3 Sean $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, -5), (5, -9)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (7, 10)\}$, determina $f + g$

Solución

Los dominios son $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ y $D_g = \{1, 2, 3, 7\}$, entonces $D_{f+g} = \{2, 3\}$, para calcular $f(x) + g(x)$ se sustituyen los valores del dominio de la suma.

$$f(2) + g(2) = 3 + 5 = 8$$
$$f(3) + g(3) = -1 + 8 = 7$$

Por tanto, $f(x) + g(x) = \{(2, 8), (3, 7)\}$

EJERCICIO 9

Para las siguientes funciones determina:

$$f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ f(x) \cdot g(x) \text{ y } \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $f(x) = 5,\ g(x) = -2$
2. $f(x) = 2x - 5,\ g(x) = 2x + 5$
3. $f(x) = x^2 - 4x - 5,\ g(x) = x^2 + 3x + 2$
4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2},\ g(x) = \dfrac{x+2}{3}$
5. $f(x) = \sqrt{x-3},\ g(x) = \sqrt{x+4}$
6. $f(x) = x + \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt{x}$
7. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x,\ g(x) = \cos^2 x$
8. $f = \{(-1, 2), (0, 3), (1, 4), (3, 6), (5, 7)\},\ g = \{(-3, 6), (-2, 8), (-1, 10), (2, 12), (3, 14), (5, 16), (6, 18)\}$
9. $f = \{(-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\},\ g = \{(-5, 8), (-4, 7), (-3, 6), (-2, 5), (-1, 4), (0, 3)\}$
10. $f = \left\{\left(-2, -\frac{1}{2}\right), (-1, -1), (1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right)\right\},\ g = \left\{(-1, 2), (1, 0), \left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Dadas las funciones:

$$f(x) = x + 3,\ g(x) = x^2 + 5x + 6,\ r(x) = x + 2,\ s(x) = x^2 - 3x - 10$$

Determina:

11. $f(x) + r(x)$
12. $f(x) - s(x)$
13. $g(x) \cdot s(x)$
14. $\dfrac{g(x)}{r(x)}$
15. $\dfrac{s(x)}{r(x)}$
16. $g(x) - s(x)$
17. $f(x) \cdot r(x)$
18. $\dfrac{f(x)}{r(x)}$
19. $\dfrac{g(x)}{s(x)}$
20. $\dfrac{g(x)}{f(x)} + \dfrac{s(x)}{r(x)}$

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2},\ g(x) = \frac{1}{x} \text{ y } h(x) = \frac{1-x}{3-x}, \text{ determina:}$$

21. $f(x) + g(x)$
22. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
23. $f(x) \cdot g(x)$
24. $f(x) - h(x)$
25. $g(x) \cdot h(x)$
26. $\dfrac{f(x)}{g(x)} + h(x)$

27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x)$

28. $\dfrac{h(2)-f(1)}{g(3)}$

29. $f(x+1)\cdot\dfrac{1}{h(x+1)}$

30. $h(x) - g(x)$

31. $\dfrac{h(x)}{g(x)} - \dfrac{g(x)}{f(x)}$

32. $f(x)\cdot h(x) - g(x)$

33. $\dfrac{f(x)+h(x)}{g(x)}$

34. $\dfrac{1}{g(x)+h(x)}$

35. $\dfrac{1}{1-h(x)}$

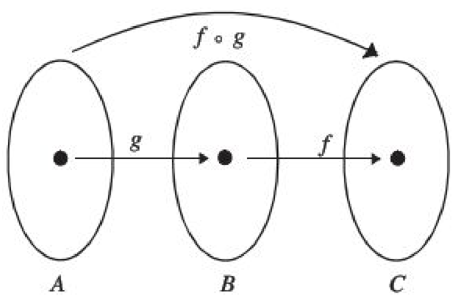
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función composición (Función de funciones)

Sean f y g funciones cualesquiera que definen una nueva función, la cual recibe el nombre de función composición de f con g y se denota con:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

y es la función cuyo dominio son los elementos del dominio de g, tal que $g(x)$ pertenece al dominio de f; es decir, $D_{f\circ g}$: $\{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ y $g = \{(3, 1), (-1, 3), (-5, 5), (-9, 2)\}$, determina $f \circ g$.

Solución

Se determinan los pares ordenados de la función g, de tal manera que el segundo término sea el primer término de los pares ordenados de la función f. Los primeros términos, de cada par ordenado encontrado, forman el dominio de la función composición.

Los pares ordenados de g que cumplen con la condición son:

$$(3, 1), (-1, 3), (-5, 5)$$

Por tanto, el dominio de la función composición es:

$$D_{fog} : \{-5, -1, 3\}$$

El dominio se evalúa de la siguiente manera:

Por definición $f \circ g = f(g(x))$, entonces el conjunto solución son todas las parejas ordenadas de la forma: $(x, f(g(x)))$

$$f(g(-5)) = f(5) = 6$$

$$f(g(-1)) = f(3) = 4$$

$$f(g(3)) = f(1) = 2$$

Finalmente el conjunto es:

$$f \circ g = \{(-5, 6), (-1, 4), (3, 2)\}$$

2 Determina $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$, para $f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} + 3 = \frac{x + 3(x-1)}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x + 3) = \frac{x+3}{(x+3)-1} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$f \circ f = f(f(x)) = f(x + 3) = (x + 3) + 3 = x + 6$$

$$g \circ g = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{1(x-1)} = x$$

Para determinar $f \circ g \circ h$ se aplica primero h, después g y, por último, f

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = x - 4$, determina $f \circ g \circ h$.

Solución

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-4)) = f(2(x-4)-1) = f(2x-8-1) = f(2x-9)$$
$$= (2x-9)^2 = 4x^2 - 36x + 81$$

4 Si $F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, determina f, g y h tal que $F = f \circ g \circ h$

Solución

$F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, la función dice suma 4, eleva al cuadrado, resta 5 y obtén la raíz.

Entonces se tiene que:

$$h(x) = x + 4 \qquad g(x) = x^2 - 5 \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

De tal forma que $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+4)) = f((x+4)^2 - 5) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$

EJERCICIO 10

Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$
3. $f(x) = 4$ y $g(x) = 2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \log(x - 2)$ y $g(x) = x - 2$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $f(x) = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$ y $g(x) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
10. $f(x) = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ y $g(x) = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
11. $f(x) = \{(0, 1), (1, 3), (-1, -1), (-2, -3)\}$ y $g(x) = \{(3, 0), (-2, -2), (1, -1)\}$

Encuentra f de manera que $(f \circ g)(x) = F(x)$

12. $g(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$ y $F(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$
13. $g(x) = x - 1$ y $F(x) = \sqrt{x - 1}$
14. $g(x) = x^3$ y $F(x) = mx^3 + b$

15. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $F(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $F(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}$

Determina $f \circ g \circ h$

17. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 3x - 1$

18. $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = 4x^2$

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = x - 2$

20. $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = x - 2$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $h(x) = \cos x$

22. $f(x) = \log x$, $g(x) = 10^x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones par e impar

- Se dice que una función f es par si: $f(-x) = f(x)$.
- Se dice que una función f es impar si: $f(-x) = -f(x)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 $f(x) = x^2 - 4$ es función par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x).$$

2 $f(x) = 3x^3 + 4x$ es función impar ya que:

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 4(-x) = -3x^3 - 4x = -(3x^3 + 4x) = -f(x)$$

3 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ no es par ni impar, ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 5(-x) + 2 = -x^3 - x^2 + 5x + 2 = -(x^3 + x^2 - 5x - 2)$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Observaciones:

Si f y g son funciones pares y h y r funciones impares, entonces se cumple:

I. $f \cdot g$ es par

II. $f \cdot h$ es impar

III. $h \cdot r$ es par

EJERCICIO 11

Indica si f es par, impar o ninguna.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
5. $f(x) = (x - 2)^3$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $f(x) = (x + 1)^2 + x^3$
10. $f(x) = x^3 - 2x$
11. $f(x) = x^4 - 2x^2$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
13. $f(x) = 3x^5 - 2x$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$
15. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función inversa

Sea f una función inyectiva con dominio A y contradominio B; la función g que satisface $f(g(x)) = x$, se llama *función inversa* de f y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio B y contradominio A.

EJEMPLOS

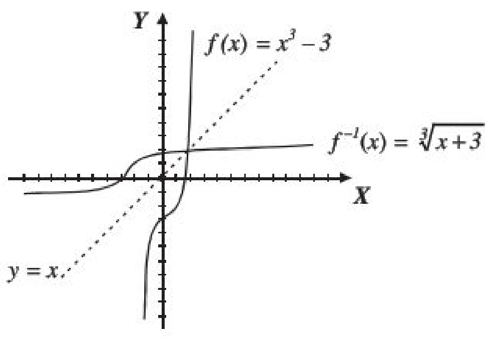
Ejemplos

1 Determina la función inversa de $f(x) = x^3 - 3$.

Solución

$f(x) = x^3 - 3$
Al emplear la definición

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad (f^{-1}(x))^3 - 3 = x \qquad (f^{-1}(x))^3 = x + 3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$$



Observa que $f^{-1}(x)$ es un reflejo de $f(x)$ sobre la función identidad $y = x$.
Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3 = x + 3 - 3 = x$$

Otra forma de obtener la función inversa es resolver la ecuación para x dejándola en términos de y, se intercambia x por $f^{-1}(x)$, y por x.

2 Determina la función inversa de $f(x) = 3x - 12$

Solución

$f(x) = 3x - 12 \rightarrow y = 3x - 12 \rightarrow y + 12 = 3x \rightarrow \frac{y}{3} + 4 = x$

Se intercambia y por x, x por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 4$

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3}+4\right) = 3\left(\frac{x}{3}+4\right) - 12 = x + 12 - 12 = x$$

3 Determina la función inversa de $f(x) = x^2$

Solución

La función no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa.

Propiedades

Si f es una función con inversa f^{-1}, entonces

- El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
- f^{-1} es invertible y su inversa es f.
- Si f es una función real entonces la gráfica de f^{-1} es el reflejo de f sobre la función $y = x$

EJERCICIO 12

Determina la función inversa (si es posible) para las siguientes funciones:

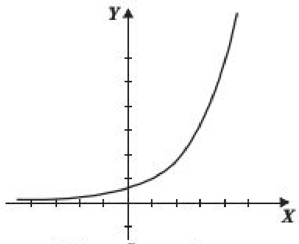
1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 2x - 5$
3. $f(x) = x^2 - 9$, $x \in [0, \infty)$
4. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^5$
7. $f(x) = x^4$, $x \in [0, \infty)$
8. $f(x) = \sqrt{3-x}$
9. $f(x) = (2x - 5)^2$
10. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0, 2]$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x+9}$
12. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $x \in [1, \infty)$
14. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
15. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

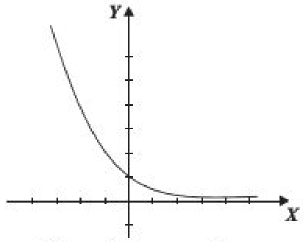
Funciones trascendentes

Función exponencial

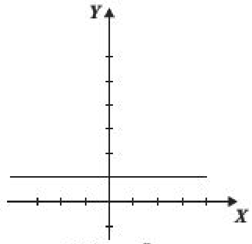
Es una función de la forma $f(x) = a^x$, con dominio $D_f : x \in (-\infty, \infty)$ y rango $y \in (0, \infty)$ (si $a = 1$, entonces el rango es $\{1\}$) y básicamente existen tres tipos:



$f(x) = a^x,\ a > 1$



$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$



$f(x) = 1^x$

EJEMPLOS

Ejemplos

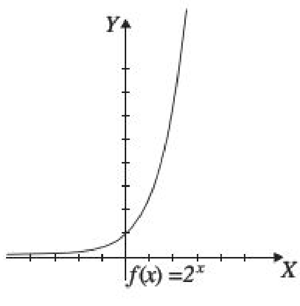
1 Obtén las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$:

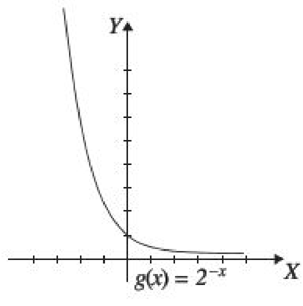
Solución

Se hace una tabulación para cada gráfica y se obtiene:

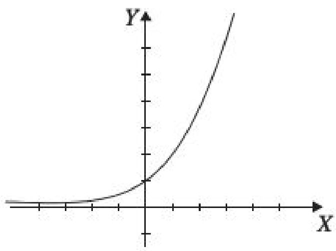
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x) = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





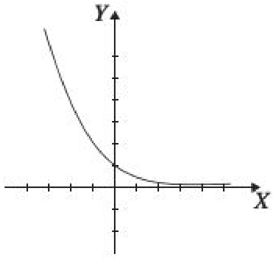
Una de las funciones exponenciales más comunes es: $f(x) = e^x$, con $e \approx 2.71828$



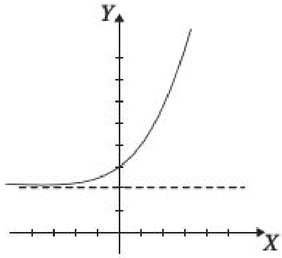
2 Obtén las gráficas de $y = e^{-x}$, $y = e^{x} + 2$, $y = \frac{2}{3}e^{x}$, $y = -e^{x}$, $y = -e^{-x}$

Solución

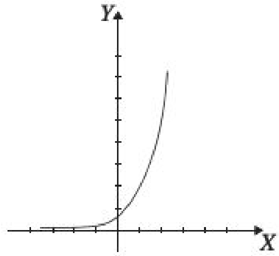
Mediante reflexiones, desplazamientos y alargamientos de una función se obtienen las siguientes gráficas:



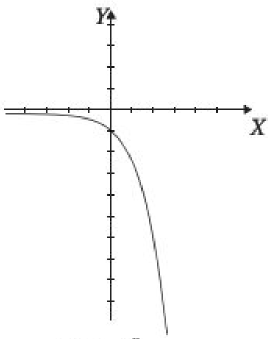
$y = e^{-x}$



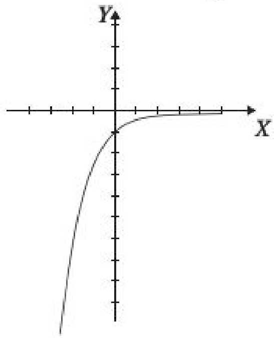
$y = e^{x} + 2$



$y = \frac{2}{3}e^{x}$



$y = -e^{x}$



$y = -e^{-x}$

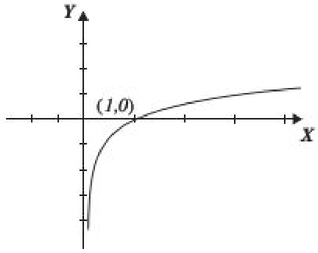
La *función exponencial* $f(x) = a^{x}$ es inyectiva (ya que es creciente), por tanto, debe tener inversa, la cual es el logaritmo con base a. Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda:

$$y = a^{x} \text{ entonces } \log_a y = x,\ y > 0, \text{ por tanto } f^{-1}(x) = \log_a x$$

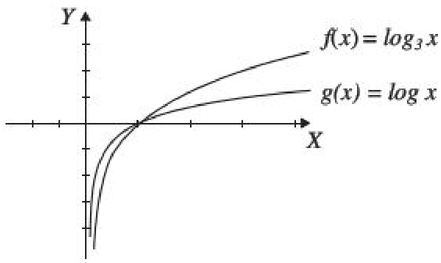
De lo anterior, se define la *función logarítmica* como:

$$g(x) = \log_a x \quad \text{Dominio: } x \in (0, \infty), \text{ Rango: } x \in (-\infty, \infty)$$

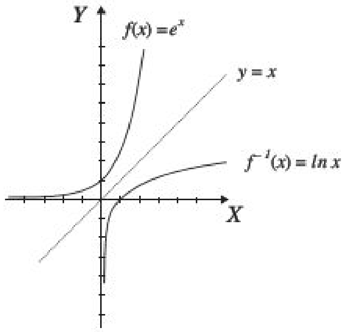
Gráfica:



Pasa por el punto (1, 0), porque $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, es creciente y tiene una asíntota vertical en $x = 0$
Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log x$ son:



Por otro lado $\ln x = \log_e x$, por tanto, si $f(x) = e^x$ entonces $f^{-1}(x) = \ln x$



EJEMPLOS

Ejemplos

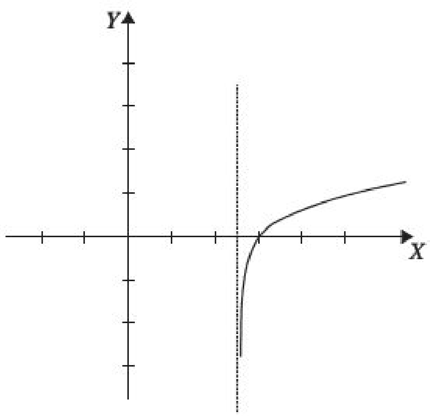
1 Determina la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

Solución

Se determina el dominio; recuerda que $\log_b N = a$, entonces $N > 0$:

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

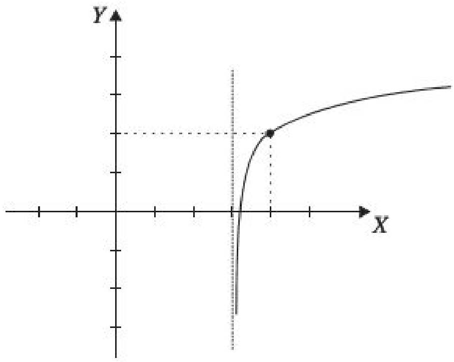
Se traza una asíntota en $x = \frac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



2 Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$.

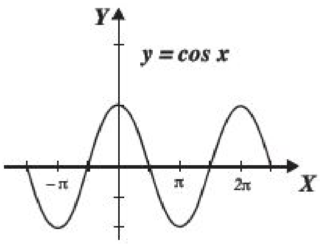
Solución

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la izquierda

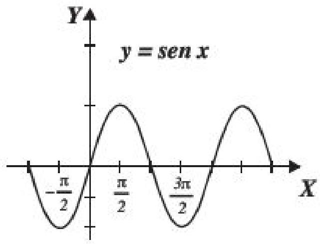


Funciones trigonométricas

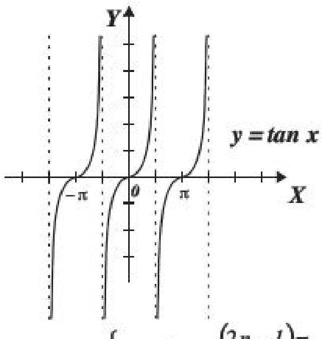
Para la gráfica de las siguientes *funciones trigonométricas* se utilizarán por convención valores en radianes para x.



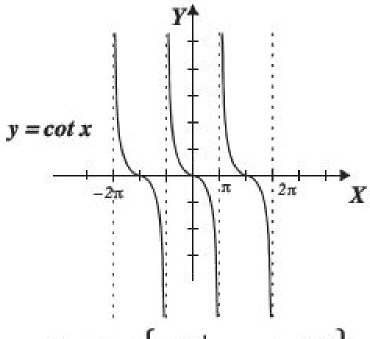
Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
Rango: $y \in [-1, 1]$



Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
Rango: $y \in [-1, 1]$

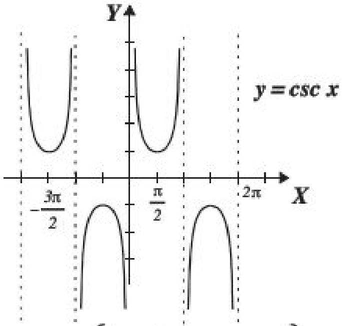


Dominio: $\left\{ x \in R \middle| x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in Z \right\}$
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

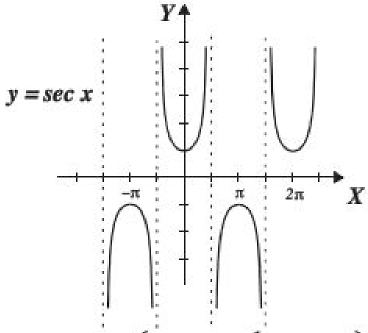


Dominio: $\{ x \in R | x \neq n\pi, n \in Z \}$
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

Las relaciones $y = \csc x$, $y = \sec x$



Dominio: $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in Z\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



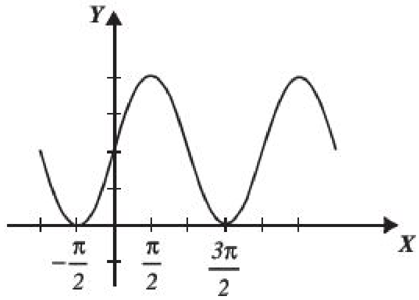
Dominio: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{1}{2} n\pi, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Ejemplo

Determina la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + 2$

Solución

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:



EJERCICIO 13

Obtén la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3^x$
2. $y = 3^{-x}$
3. $y = 3^x - 3$
4. $f(x) = e^x + 1$
5. $f(x) = 1 - e^x$
6. $f(x) = e^{-x} + 2$
7. $f(x) = \ln(x - 2)$
8. $f(x) = 1 + \log x$
9. $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$
10. $f(x) = 3 \cos x - 2$
11. $f(x) = -2 \operatorname{sen} x + 1$
12. $f(x) = -\tan x$
13. $f(x) = -2 \sec x + 1$
14. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Las funciones como modelos matemáticos

Como se afirmó al principio del capítulo, las funciones representan modelos para resolver problemas de la vida real.

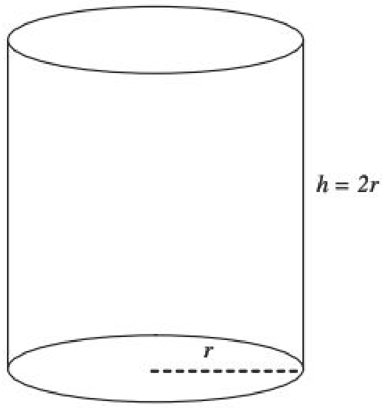
EJEMPLOS

1 La altura de un recipiente cilíndrico es el doble que el radio de su base, expresa el volumen del cilindro en función de su altura.

Solución

El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$



Puesto que la altura es el doble del radio de la base, entonces:

$$h = 2r \rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Al sustituir $r = \frac{h}{2}$ en el volumen se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad h = \pi\frac{h^2}{4} \quad h = \frac{\pi h^3}{4}$$

Por consiguiente

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{4}$$

2 El perímetro de un rectángulo es de 26 unidades, expresa el área del rectángulo en función de su largo.

Solución

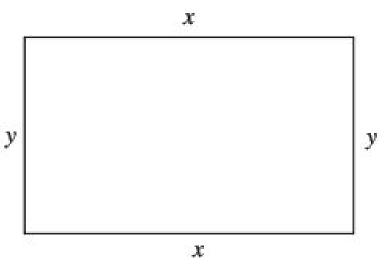
Se establecen las dimensiones del rectángulo:

x: largo, y: ancho

El perímetro es

$$2x + 2y = 26 \rightarrow x + y = 13$$

$$y = 13 - x$$



El área del rectángulo es

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 13 - x$, se obtiene:

$$A = x(13 - x) = 13x - x^2$$

Por consiguiente,

$$A(x) = 13x - x^2$$

3 Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.

Solución

Sean x y y las dimensiones del corral donde,

x: ancho del corral, y: largo del corral

Entonces,

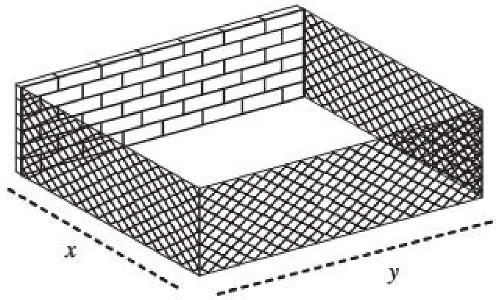
$$2x + y = 1\,600 \rightarrow y = 1\,600 - 2x$$

el área del rectángulo está dada por:

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 1\,600 - 2x$, se obtiene:

$$A(x) = x(1\,600 - 2x) = 1\,600x - 2x^2$$



4 Un globo asciende desde un punto con velocidad constante de $1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a 30 m del punto del despegue se encuentra una casa. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que existe entre la casa y el globo en función del tiempo.

Solución

Sea $v = \frac{d}{t}$, entonces $d = vt$, donde, d es la distancia, v la velocidad, t el tiempo.

Al transcurrir t segundos el globo sube $1.5\,t$ en metros; entonces se aplica el teorema de Pitágoras para obtener:

$$d^2 = (1.5\,t)^2 + (30)^2 \rightarrow d^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (30)^2$$

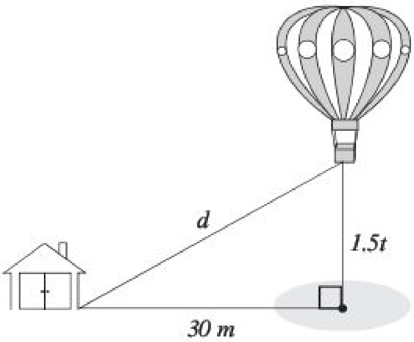
$$d^2 = \frac{9}{4}t^2 + 900$$

$$d = \sqrt{\frac{9t^2 + 3\,600}{4}}$$

$$d = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$

Por tanto:

$$d(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$



EJERCICIO 14

1. El área de la base de un cilindro es de 40 π m^2. Expresa el volumen en función de la altura.
2. Fluye agua por un tanque cónico de 10 m de radio y 25 m de altura. Cuando el nivel del agua está a una altura de h y radio r, expresa el volumen del agua en función de la altura.
3. Si el ancho de un rectángulo es la quinta parte de su largo, determina el perímetro en función de su área.
4. Dada una circunferencia de radio r, precisa el área de la circunferencia en función de su diámetro d.
5. Se inscribe un cubo de arista x en una esfera de radio r. Expresa el volumen de la esfera en función de la arista del cubo.
6. Al graficar la recta, cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$, y trazar una línea vertical paralela al eje Y en cualquier punto sobre el eje X se genera un triángulo rectángulo. Expresa el área de dicho triángulo en función de la abscisa x.
7. Se desea construir un tanque de gas en forma de cilindro circular recto de 2.5 m de altura y a cada extremo del cilindro van unidas dos semiesferas de radio r. Expresa el volumen del tanque en función de r.
8. Se inscribe un triángulo equilátero de lado x en una circunferencia de radio r. Expresa el área de la circunferencia en función del lado x.
9. Se inscribe un rectángulo en una elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Precisa el área del rectángulo en función de la abscisa x.
10. Un cartel de base x y altura y tiene un área de 540 cm^2 con márgenes de 2 cm a los lados y 1.5 cm en las partes superior e inferior. Expresa el área impresa en función de la base del cartel.
11. Desde cierto puente de la Ciudad de México un peatón observa un automóvil que viaja a 18 m/s en una avenida perpendicular al puente peatonal. Si t es el tiempo en segundos, determina la distancia entre el peatón y el automóvil en función del tiempo, si la altura del puente es de 4.5 m.
12. Una lancha es remolcada con un cable hacia un muelle. El cable es enrollado a razón de 0.5 m/s y la lancha se encuentra a 2 m por debajo del nivel del muelle. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que le falta recorrer a la lancha hacia el muelle en función del tiempo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente