47. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$
$\mathbf{a} = \mathbf{0}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$ no existe.

49. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \left[1/\left(2\sqrt{t}\right)\right]\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4t+1}/\left(2\sqrt{t}\right)$
$\mathbf{a} = \left[-1/\left(4t\sqrt{t}\right)\right]\mathbf{j}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = -1/\left(4t\sqrt{t}\sqrt{4t+1}\right)$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = 1/\left(2t\sqrt{4t+1}\right)$

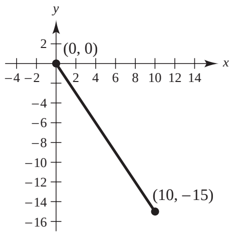
51. $\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$
$\mathbf{a} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

53. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 5t^2}$
$\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{5t}{\sqrt{1 + 5t^2}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 5t^2}}$

55. $x = -\sqrt{3}t + 1$
$y = t + \sqrt{3}$
$z = t + (\pi/3)$

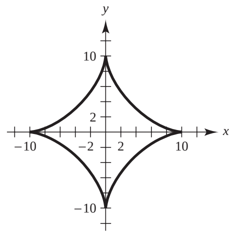
57. 4.58 mi/s

59.



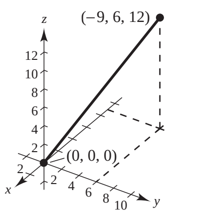
$5\sqrt{13}$

61.



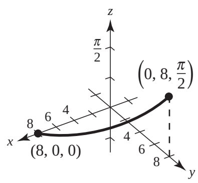
60

63.



$3\sqrt{29}$

65.



$\sqrt{65}\pi/2$

67. 0 **69.** $\left(2\sqrt{5}\right)/(4 + 5t^2)^{3/2}$ **71.** $\sqrt{2}/3$

73. $K = \sqrt{17}/289$; $r = 17\sqrt{17}$ **75.** $K = \sqrt{2}/4$; $r = 2\sqrt{2}$

77. La curvatura cambia bruscamente de cero a una constante no cero en los puntos B y C.

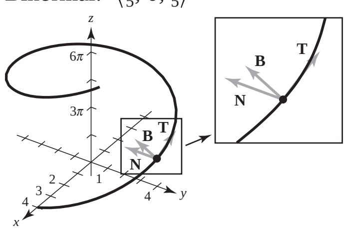
SP Solución de problemas (página 883)

1. *a*) a *b*) πa *c*) $K = \pi a$

3. Velocidad inicial: 447.21 pies/s; $\theta \approx 63.43°$

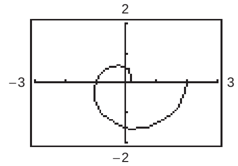
5 a 7. Demostraciones

9. Tangente unitario: $\left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle$
Normal unitario: $\langle 0, -1, 0 \rangle$
Binormal: $\left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle$



11. *a*) Demostración *b*) Demostración

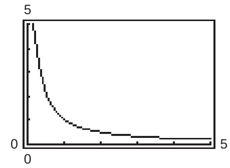
13. *a*)



b) 6.766

c) $K = [\pi(\pi^2t^2 + 2)]/(\pi^2t^2 + 1)^{3/2}$
$K(0) = 2\pi$
$K(1) = [\pi(\pi^2 + 2)]/(\pi^2 + 1)^{3/2} \approx 1.04$
$K(2) \approx 0.51$

d)



e) $\lim_{t\to\infty} K = 0$

f) Cuando $t \to \infty$, la gráfica forma una espiral hacia afuera y la curva decrece.

Capítulo 13

Sección 13.1 (página 894)

1. No es una función porque para algunos valores de x y y (por ejemplo $x = y = 0$) hay dos valores de z.

3. z es una función de x y y. **5.** z no es una función de x y y.

7. *a*) 6 *b*) -4 *c*) 150 *d*) $5y$ *e*) $2x$ *f*) $5t$

9. *a*) 5 *b*) $3e^2$ *c*) $2/e$ *d*) $5e^y$ *e*) xe^2 *f*) te^t

11. *a*) $\frac{2}{3}$ *b*) 0 *c*) $-\frac{3}{2}$ *d*) $-\frac{10}{3}$

13. *a*) $\sqrt{2}$ *b*) 3 sen 1 *c*) $-3\sqrt{3}/2$ *d*) 4

15. *a*) -4 *b*) -6 *c*) $-\frac{25}{4}$ *d*) $\frac{9}{4}$

17. *a*) 2, $\Delta x \neq 0$ *b*) $2y + \Delta y$, $\Delta y \neq 0$

19. Dominio: $\{(x, y)\colon\ x, y$ son cualquier número real$\}$
Rango: $z \geq 0$

21. Dominio: $\{(x, y)\colon\ y \geq 0\}$
Rango: Todos los números reales

23. Dominio: $\{(x, y)\colon\ x \neq 0, y \neq 0\}$
Rango: Todos los números reales

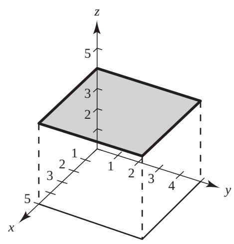
25. Dominio: $\{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 4\}$
Rango: $0 \leq z \leq 2$

27. Dominio: $\{(x, y)\colon\ -1 \leq x + y \leq 1\}$
Rango: $0 \leq z \leq \pi$

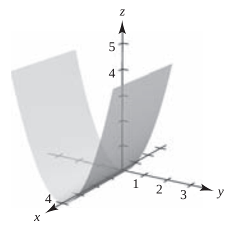
29. Dominio: $\{(x, y)\colon\ y < -x + 4\}$
Rango: Todos los números reales

31. *a*) (20, 0, 0) *b*) (−15, 10, 20)
c) (20, 15, 25) *d*) (20, 20, 0)

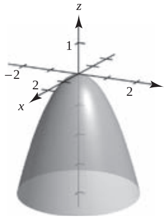
33.



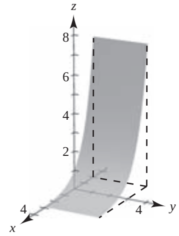
35.



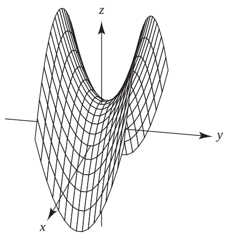
37.



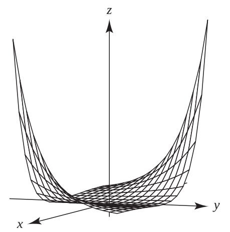
39.



41.

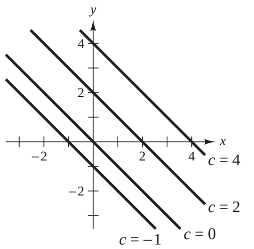


43.

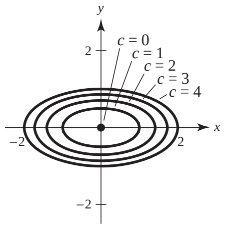


45. *c* **46.** *d* **47.** *b* **48.** *a*

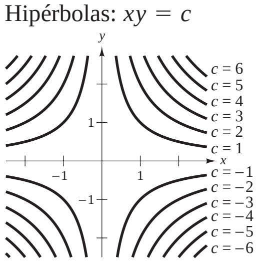
49. Rectas: $x + y = c$



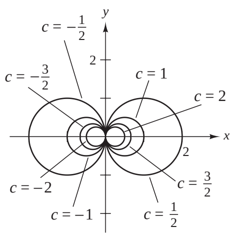
51. Elipses: $x^2 + 4y^2 = c$
(excepto $x^2 + 4y^2 = 0$
que es el punto $(0, 0)$)



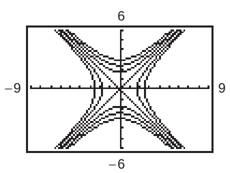
53. Hipérbolas: $xy = c$



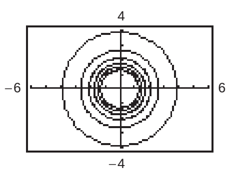
55. Círculos que pasan por $(0, 0)$
y con centro en $(1/(2c), 0)$



57.



59.



61. La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los cuales $z = f(x, y)$ y donde (x, y) está en el dominio de *f*. La gráfica puede ser interpretada como una superficie en el espacio. Las curvas de nivel son los campos escalares $f(x, y) = c$, donde *c* es una constante.

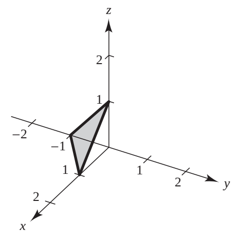
63. $f(x, y) = x/y$; las curvas de nivel son las rectas $y = (1/c)x$.

65. La superficie puede tener la forma de una silla de montar. Por ejemplo, sea $f(x, y) = xy$. La gráfica no es única: cualquier traslación vertical producirá las mismas curvas de nivel.

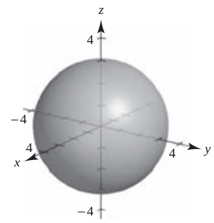
67.

	Tasa de inflación		
Tasa de impuesto	**0**	**0.03**	**0.05**
0	\$1 790.85	\$1 332.56	\$1 099.43
0.28	\$1 526.43	\$1 135.80	\$937.09
0.35	\$1 466.07	\$1 090.90	\$900.04

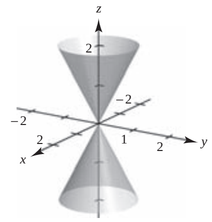
69.



71.

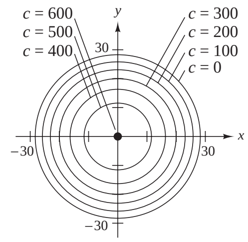


73.



75. *a*) 243 pies-tablón
b) 507 pies-tablón

77.



79. Demostración

81. $C = 1.20xy + 1.50(xz + yz)$

83. *a*) $k = \frac{520}{3}$
b) $P = 520T/(3V)$
Las curvas de nivel son rectas.

85. *a*) *C* *b*) *A* *c*) *B*

87. *a*) No; las curvas de nivel son irregulares y están espaciadas esporádicamente.
b) Utilizar más colores.

89. Falso: sea $f(x, y) = 4$. **91.** Verdadero

Sección 13.2 (página 904)

1 a 3. Demostraciones **5.** 1 **7.** 12 **9.** 9, continua
11. e^2, continua **13.** 0, continua para $y \neq 0$
15. $\frac{1}{2}$, continua, excepto en $(0, 0)$ **17.** 0, continua
19. 0, continua para $xy \neq 1$, $|xy| \leq 1$
21. $2\sqrt{2}$, continua para $x + y + z \geq 0$ **23.** 0
25. No existe el límite. **27.** 4 **29.** No existe el límite.
31. No existe el límite. **33.** 0
35. No existe el límite. **37.** Continua, 1

39.

(x, y)	$(1, 0)$	$(0.5, 0)$	$(0.1, 0)$	$(0.01, 0)$	$(0.001, 0)$
$f(x, y)$	0	0	0	0	0

$y = 0$: 0

(x, y)	$(1, 1)$	$(0.5, 0.5)$	$(0.1, 0.1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(x, y)	$(0.01, 0.01)$	$(0.001, 0.001)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$y = x$: $\frac{1}{2}$

No existe el límite.

Continua excepto en $(0, 0)$

41.

(x, y)	$(1, 1)$	$(0.25, 0.5)$	$(0.01, 0.1)$
$f(x, y)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(x, y)	$(0.0001, 0.01)$	$(0.000001, 0.001)$
$f(x, y)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$x = y^2$: $-\frac{1}{2}$

(x, y)	$(-1, 1)$	$(-0.25, 0.5)$	$(-0.01, 0.1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(x, y)	$(-0.0001, 0.01)$	$(-0.000001, 0.001)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$x = -y^2$: $\frac{1}{2}$

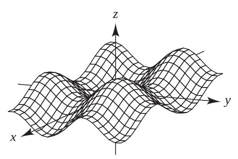
No existe el límite.

Continua excepto en $(0, 0)$

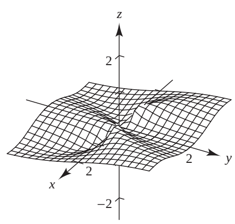
43. f es continua. y es continua excepto en $(0, 0)$. y tiene una discontinuidad removible en $(0, 0)$.

45. f es continua. g es continua excepto en $(0, 0)$. g tiene una discontinuidad removible en $(0, 0)$.

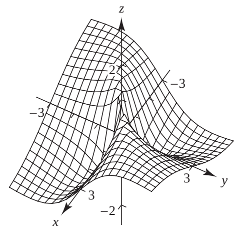
47. 0



49. No existe el límite.



51. No existe el límite.



53. 0 **55.** 0 **57.** 1 **59.** 1 **61.** 0

63. Continua excepto en $(0, 0, 0)$ **65.** Continua

67. Continua **69.** Continua

71. Continua para $y \neq 2x/3$ **73.** *a*) $2x$ *b*) -4

75. *a*) $1/y$ *b*) $-x/y^2$ **77.** *a*) $3 + y$ *b*) $x - 2$

79. Verdadero **81.** Falso: sea $f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2), & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$.

83. *a*) $(1 + a^2)/a, \quad a \neq 0$ *b*) No existe el límite.

c) No, el límite no existe. Trayectorias diferentes dan límites distintos.

85. 0 **87.** $\pi/2$ **89.** Demostración

91. Ver la “Definición del límite de una función de dos variables”, en la página 899; mostrar que el valor de $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ no es el mismo para dos diferentes trayectorias hacia (x_0, y_0).

93. *a*) Verdadero. Para hallar el primer límite, sustituir (2, 3) por (x, y). Para hallar el segundo límite, sustituir 3 por y para encontrar una función de x. Entonces sustituir 2 por x.

b) Falso. La convergencia de una trayectoria no implica la convergencia de todas las trayectorias.

c) Falso. Sea $f(x, y) = 4\left(\dfrac{(x - 2)^2 - (y - 3)^2}{(x - 2)^2 + (y - 3)^2}\right)^2$.

d) Verdadero. Cuando se multiplica por cero a cualquier número real, siempre se obtiene cero.

Sección 13.3 (página 914)

1. $f_x(4, 1) < 0$ **3.** $f_y(4, 1) > 0$

5. No. Porque al calcular la derivada parcial con respecto a y, se considera a x constante. De manera que el denominador se considera como una constante y no contiene variables.

7. Sí. Porque al calcular la derivada parcial con respecto a x, se considera a y constante. De manera que tanto el numerador como el denominador contienen variables.

9. $f_x(x, y) = 2$
$f_y(x, y) = -5$

11. $f_x(x, y) = 2xy^3$
$f_y(x, y) = 3x^2y^2$

13. $\partial z/\partial x = \sqrt{y}$
$\partial z/\partial y = x/(2\sqrt{y})$

15. $\partial z/\partial x = 2x - 4y$
$\partial z/\partial y = -4x + 6y$

17. $\partial z/\partial x = ye^{xy}$
$\partial z/\partial y = xe^{xy}$

19. $\partial z/\partial x = 2xe^{2y}$
$\partial z/\partial y = 2x^2e^{2y}$

21. $\partial z/\partial x = 1/x$
$\partial z/\partial y = -1/y$

23. $\partial z/\partial x = 2x/(x^2 + y^2)$
$\partial z/\partial y = 2y/(x^2 + y^2)$

25. $\partial z/\partial x = (x^3 - 3y^3)/(x^2y)$
$\partial z/\partial y = (-x^3 + 12y^3)/(2xy^2)$

27. $h_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$
$h_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$

29. $f_x(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$
$f_y(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$

31. $\partial z/\partial x = -y \operatorname{sen} xy$
$\partial z/\partial y = -x \operatorname{sen} xy$

33. $\partial z/\partial x = 2\sec^2(2x - y)$
$\partial z/\partial y = -\sec^2(2x - y)$

35. $\partial z/\partial x = ye^y \cos xy$
$\partial z/\partial y = e^y(x \cos xy + \operatorname{sen} xy)$

37. $\partial z/\partial x = 2 \cosh(2x + 3y)$
$\partial z/\partial y = 3 \cosh(2x + 3y)$

39. $f_x(x, y) = 1 - x^2$
$f_y(x, y) = y^2 - 1$

41. $f_x(x, y) = 3$
$f_y(x, y) = 2$

43. $f_x(x, y) = 1/\left(2\sqrt{x + y}\right)$
$f_y(x, y) = 1/\left(2\sqrt{x + y}\right)$

45. $\partial z/\partial x = -1$
$\partial z/\partial y = 0$

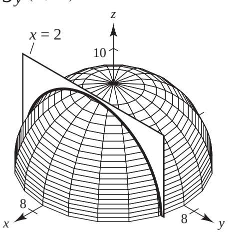
47. $\partial z/\partial x = -1$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{2}$

49. $\partial z/\partial x = \frac{1}{4}$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{4}$

51. $\partial z/\partial x = -\frac{1}{4}$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{4}$

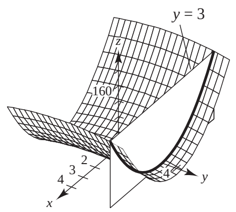
53. $g_x(1, 1) = -2$
$g_y(1, 1) = -2$

55.



$-\frac{1}{2}$

57.



18

59. $H_x(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$
$H_y(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y + 3z)$
$H_z(x, y, z) = 3 \cos(x + 2y + 3z)$

61. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

63. $F_x(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$
$F_y(x, y, z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$
$F_z(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$

65. $f_x = 3; f_y = 1; f_z = 2$

67. $f_x = 1; f_y = 1; f_z = 1$

69. $f_x = 0; f_y = 0; f_z = 1$

71. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$

73. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$

75. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

77. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \tan y$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x \sec^2 y \tan y$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \sec^2 y$

79. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \cos xy - \operatorname{sen} xy$

81. $x = 2, y = -2$ **83.** $x = -6, y = 4$

85. $x = 1, y = 1$ **87.** $x = 0, y = 0$

89. $\partial z/\partial x = \sec y$
$\partial z/\partial y = x \sec y \tan y$
$\partial^2 z/\partial x^2 = 0$
$\partial^2 z/\partial y^2 = x \sec y(\sec^2 y + \tan^2 y)$
$\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z/\partial x \partial y = \sec y \tan y$
No existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

91. $\partial z/\partial x = (y^2 - x^2)/[x(x^2 + y^2)]$
$\partial z/\partial y = -2y/(x^2 + y^2)$
$\partial^2 z/\partial x^2 = (x^4 - 4x^2y^2 - y^4)/[x^2(x^2 + y^2)^2]$
$\partial^2 z/\partial y^2 = 2(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$
$\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z/\partial x \partial y = 4xy/(x^2 + y^2)^2$
No existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

93. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = 0$

95. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = z^2e^{-x} \operatorname{sen} yz$

97. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0 + 0 = 0$

99. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$

101. $\partial^2 z/\partial t^2 = -c^2 \operatorname{sen}(x - ct) = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

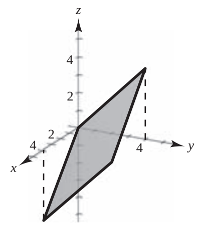
103. $\partial^2 z/\partial t^2 = -c^2/(x + ct)^2 = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

105. $\partial z/\partial t = -e^{-t} \cos x/c = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

107. Sí, $f(x, y) = \cos(3x - 2y)$. **109.** 0

111. Si $z = f(x, y)$, entonces para encontrar f_x se considera a y como constante y se deriva con respecto a x. De la misma forma, para encontrar f_y se considera a x como constante y se deriva con respecto a y.

113.



115. Las derivadas parciales combinadas son iguales. Ver teorema 13.3.

117. *a*) 72 *b*) 72

119. $IQ_M = \dfrac{100}{C}, IQ_M(12, 10) = 10$

El IQ crece con una razón de 10 puntos por año de edad mental cuando la edad mental es de 12 y la edad cronológica es de 10.

$IQ_C = -\dfrac{100M}{C^2}, IQ_C(12, 10) = -12$

El IQ disminuye con una razón de 12 puntos por año de edad mental cuando la edad mental es de 12 y la edad cronológica es de 10.

121. Un incremento en el costo de la comida y alojamiento o en el de la matrícula causará una disminución del número de solicitantes.

123. $\partial T/\partial x = -2.4°/\text{m}, \partial T/\partial y = -9°/\text{m}$

125. $T = PV/(nR) \implies \partial T/\partial P = V/(nR)$
$P = nRT/V \implies \partial P/\partial V = -nRT/V^2$
$V = nRT/P \implies \partial V/\partial T = nR/P$
$\partial T/\partial P \cdot \partial P/\partial V \cdot \partial V/\partial T = -nRT/(VP) = -nRT/(nRT) = -1$

127. *a*) $\partial z/\partial x = -0.92; \partial z/\partial y = 1.03$
b) Cuando el consumo de la leche de sabor (x) crece, el consumo de las leches light y descremada (z) disminuye. Cuando el consumo de la leche baja en grasas (y) disminuye, el consumo de la leche descremada también disminuye.

129. Falso; sea $z = x + y + 1$. **131.** Verdadero

133. *a)* $f_x(x, y) = \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

$f_y(x, y) = \dfrac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

b) $f_x(0, 0) = 0,\ f_y(0, 0) = 0$

c) $f_{xy}(0, 0) = -1,\ f_{yx}(0, 0) = 1$

d) f_{xy} o f_{yx} o ambas no son continuas en $(0, 0)$.

135. *a)* $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 1$

b) $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no existen cuando $y = -x$.

Sección 13.4 (página 923)

1. $dz = 4xy^3\,dx + 6x^2y^2\,dy$

3. $dz = 2(x\,dx + y\,dy)/(x^2 + y^2)^2$

5. $dz = (\cos y + y \operatorname{sen} x)\,dx - (x \operatorname{sen} y + \cos x)\,dy$

7. $dz = (e^x \operatorname{sen} y)\,dx + (e^x \cos y)\,dy$

9. $dw = 2z^3y \cos x\,dx + 2z^3 \operatorname{sen} x\,dy + 6z^2\,y \operatorname{sen} x\,dz$

11. *a)* $f(2, 1) = 1, f(2.1, 1.05) = 1.05, \Delta z = 0.05$

b) $dz = 0.05$

13. *a)* $f(2, 1) = 11, f(2.1, 1.05) = 10.4875, \Delta z = -0.5125$

b) $dz = -0.5$

15. *a)* $f(2, 1) = e^2 \approx 7.3891, f(2.1, 1.05) = 1.05e^{2.1} \approx 8.5745,$ $\Delta z \approx 1.1854$

b) $dz \approx 1.1084$

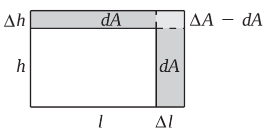
17. 0.44 **19.** -0.012

21. Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son incrementos de x y y, y x y y son variables independientes, entonces el diferencial total de la variable dependiente z es

$dz = (\partial z/\partial x)\,dx + (\partial z/\partial y)\,dy = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y.$

23. La aproximación de Δz por dz se llama una aproximación lineal, donde dz representa el cambio en la altura del plano tangente a la superficie en el punto $P(x_0, y_0)$.

25. $dA = h\,dl + l\,dh$



$\Delta A - dA = dl\,dh$

27.

Δr	Δh	dV	ΔV	$\Delta V - dV$
0.1	0.1	8.3776	8.5462	0.1686
0.1	-0.1	5.0265	5.0255	-0.0010
0.001	0.002	0.1005	0.1006	0.0001
-0.0001	0.0002	-0.0034	-0.0034	0.0000

29. *a)* $dz = -0.92\,dx + 1.03\,dy$

b) $dz = \pm 0.4875;\ dz/z \approx 8.1\%$

31. 10% **33.** $dC = \pm 2.4418;\ dC/C = 19\%$

35. *a)* $V = 18 \operatorname{sen} \theta$ ft^3; $\theta = \pi/2$

b) 1.047 ft^3

37. 10% **39.** $L \approx 8.096 \times 10^{-4} \pm 6.6 \times 10^{-6}$ microhenrys

41. Las respuestas varían. Ejemplo:

$\varepsilon_1 = \Delta x$

$\varepsilon_2 = 0$

43. Las respuestas varían. Ejemplo:

$\varepsilon_1 = y\,\Delta x$

$\varepsilon_2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

45 a 47. Demostraciones

Sección 13.5 (página) 931

1. $26t$ **3.** $e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$ **5.** *a)* y *b)* $-e^{-t}$

7. *a)* y *b)* $2e^{2t}$ **9.** *a)* y *b)* $3(2t^2 - 1)$

11. $-11\sqrt{29}/29 \approx -2.04$ **13.** $\dfrac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$; 1

15. $\partial w/\partial s = 4s, 4$

$\partial w/\partial t = 4t, 0$

17. $\partial w/\partial s = 5\cos(5s - t), 0$

$\partial w/\partial t = -\cos(5s - t), 0$

19. $\partial w/\partial r = 2r/\theta^2$

$\partial w/\partial \theta = -2r^2/\theta^3$

21. $\partial w/\partial r = 0$

$\partial w/\partial \theta = 1$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = t^2(3s^2 - t^2)$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = 2st(s^2 - 2t^2)$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = te^{s^2 - t^2}(2s^2 + 1)$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = se^{s^2 - t^2}(1 - 2t^2)$

27. $\dfrac{y - 2x + 1}{2y - x + 1}$ **29.** $-\dfrac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2 + y}$

31. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{z}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{z}$

33. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{y + z}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y + z}$

35. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1 - \dfrac{\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

37. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(ze^{xz} + y)}{xe^{xz}}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -e^{-xz}$

39. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{y + w}{x - z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x - z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{w - y}{x - z}$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{y \operatorname{sen} xy}{z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{x \operatorname{sen} xy - z \cos yz}{z}$

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{y \cos yz + w}{z}$

43. *a)* $f(tx, ty) = \dfrac{(tx)(ty)}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = t\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = tf(x, y);\ n = 1$

b) $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1f(x, y)$

45. *a)* $f(tx, ty) = e^{tx/ty} = e^{x/y} = f(x, y);\ n = 0$

b) $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \dfrac{xe^{x/y}}{y} - \dfrac{xe^{x/y}}{y} = 0$

47. 47 **49.** $dw/dt = (\partial w/\partial x \cdot dx/dt) + (\partial w/\partial y \cdot dy/dt)$

51. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$

53. $4\,608\,\pi$ pulg^3/min; 624π pulg^2/min

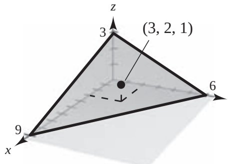
55. $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{mR}\left[V\dfrac{dp}{dt} + p\dfrac{dV}{dt}\right]$ **57.** $28m$ cm^2/s

59. Demostración **61.** *a)* Demostración *b)* Demostración

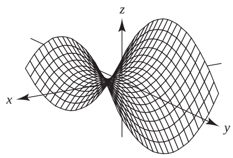
63 a 65. Demostraciones

Sección 13.6 (página 942)

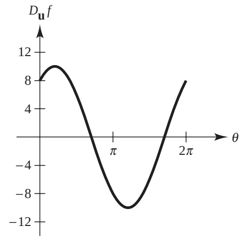
1. 1 **3.** -1 **5.** $-e$ **7.** $-\frac{7}{25}$ **9.** $2\sqrt{3}/3$ **11.** $\frac{8}{3}$
13. $\sqrt{2}(x+y)$ **15.** $\left[(2+\sqrt{3})/2\right]\cos(2x+y)$ **17.** 6
19. $-8/\sqrt{5}$ **21.** $3\mathbf{i}+10\mathbf{j}$ **23.** $4\mathbf{i}-\mathbf{j}$ **25.** $6\mathbf{i}-10\mathbf{j}-8\mathbf{k}$
27. $3\sqrt{2}$ **29.** $2\sqrt{5}/5$ **31.** $2[(x+y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}]$; $2\sqrt{2}$
33. $\tan y\mathbf{i}+x\sec^2 y\mathbf{j}$, $\sqrt{17}$ **35.** $e^{-x}(-y\mathbf{i}+\mathbf{j})$; $\sqrt{26}$
37. $\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 1 **39.** $yz(yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+2xy\mathbf{k})$; $\sqrt{33}$
41.



43. *a*) $-5\sqrt{2}/12$ *b*) $\frac{3}{5}$ *c*) $-\frac{1}{5}$ *d*) $-11\sqrt{10}/60$
45. $\sqrt{13}/6$
47. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo: $-4\mathbf{i}+\mathbf{j}$
b) $-\frac{2}{5}\mathbf{i}+\frac{1}{10}\mathbf{j}$ *c*) $\frac{2}{5}\mathbf{i}-\frac{1}{10}\mathbf{j}$
En dirección opuesta al gradiente
49. *a*)

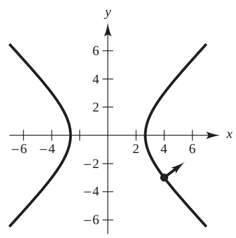


b) $D_{\mathbf{u}}f(4,-3)=8\cos\theta+6\,\mathrm{sen}\,\theta$



Generada con Mathematica

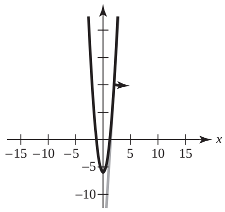
c) $\theta\approx 2.21$, $\theta\approx 5.36$
Direcciones en las cuales no hay cambio en f
d) $\theta\approx 0.64$, $\theta\approx 3.79$
Direcciones de mayor tasa de cambio en f
e) 10; magnitud de la mayor razón de cambio
f)



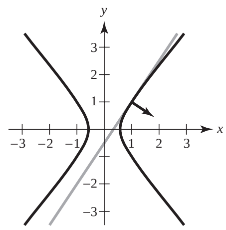
Generada con Mathematica

Ortogonal a la curva de nivel

51. $-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ **53.** $3\mathbf{i}-\mathbf{j}$
55. *a*) $16\mathbf{i}-\mathbf{j}$ *b*) $(\sqrt{257}/257)(16\mathbf{i}-\mathbf{j})$ *c*) $y=16x-22$
d)



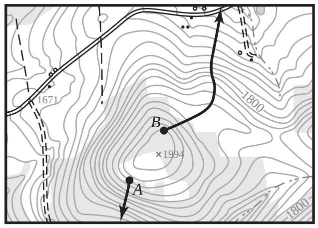
57. *a*) $6\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ *b*) $(\sqrt{13}/13)(3\mathbf{i}-2\mathbf{j})$ *c*) $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$
d)



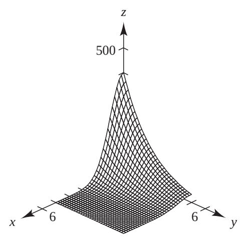
59. La derivada direccional de $z=f(x,y)$ en la dirección de $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\theta,\,y+t\,\mathrm{sen}\,\theta)-f(x,y)}{t}$$

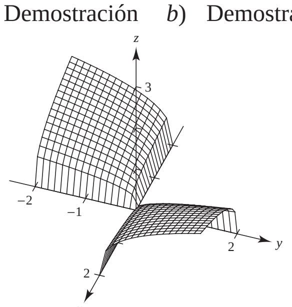
si el límite existe.
61. Ver la definición en la página 936. Ver las propiedades en la página 937.
63. El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.
65. $\frac{1}{625}(7\mathbf{i}-24\mathbf{j})$
67.



69. $y^2=10x$
71. *a*)



b) El calor no cambia en las direcciones perpendiculares al gradiente: $\pm(\mathbf{i}-6\mathbf{j})$.
c) El aumento es mayor en la dirección del gradiente: $-3\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$.
73. Verdadero **75.** Verdadero
77. $f(x,y,z)=e^x\cos y+\frac{1}{2}z^2+C$
79. *a*) Demostración *b*) Demostración
c)



Sección 13.7 (página 951)

1. La superficie de nivel se puede escribir como $3x-5y+3z=15$, que es la ecuación de un plano en el espacio.
3. La superficie de nivel se puede escribir como $4x^2+9y^2-4z^2=0$, que es la ecuación de un cono elíptico en el espacio que se encuentra en el eje z.

5. $\frac{1}{13}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ **7.** $(\sqrt{6}/6)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

9. $(\sqrt{145}/145)(12\mathbf{i} - \mathbf{k})$ **11.** $\frac{1}{13}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$

13. $(\sqrt{3}/3)(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ **15.** $(\sqrt{113}/113)(-\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

17. $4x + 2y - z = 2$ **19.** $3x + 4y - 5z = 0$

21. $2x - 2y - z = 2$ **23.** $2x + 3y + 3z = 6$

25. $3x + 4y - 25z = 25(1 - \ln 5)$ **27.** $x - 4y + 2z = 18$

29. $6x - 3y - 2z = 11$ **31.** $x + y + z = 9$
$x - 3 = y - 3 = z - 3$

33. $2x + 4y + z = 14$
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-4}{1}$

35. $6x - 4y - z = 5$
$\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$

37. $10x + 5y + 2z = 30$
$\dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-5}{2}$

39. $x - y + 2z = \pi/2$
$\dfrac{(x-1)}{1} = \dfrac{(y-1)}{-1} = \dfrac{z-(\pi/4)}{2}$

41. *a)* $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ *b)* $\dfrac{1}{2}$, no son ortogonales

43. *a)* $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-3}$ *b)* $\dfrac{16}{25}$, no son ortogonales

45. *a)* $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{-4}$ *b)* 0, son ortogonales

47. 86.0° **49.** 77.4° **51.** $(0, 3, 12)$ **53.** $(2, 2, -4)$

55. $(0, 0, 0)$ **57.** Demostración

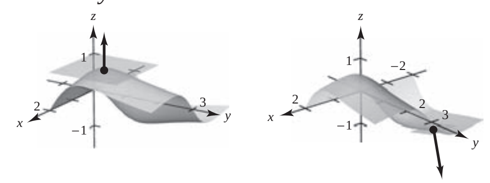
59. *a)* Demostración *b)* Demostración

61. $(-2, 1, -1)$ o $(2, -1, 1)$

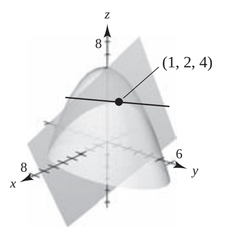
63. $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$
$+ F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

65. Las respuestas varían.

67. *a)* Recta: $x = 1, y = 1, z = 1 - t$
Plano: $z = 1$
b) Recta: $x = -1, y = 2 + \frac{6}{25}t, z = -\frac{4}{5} - t$
Plano: $6y - 25z - 32 = 0$
c)



69. *a)* $x = 1 + t$
$y = 2 - 2t$
$z = 4$
$\theta \approx 48.2°$
b)



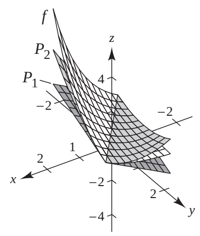
71. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$
$F_x(x, y, z) = 2x/a^2$
$F_y(x, y, z) = 2y/b^2$
$F_z(x, y, z) = 2z/c^2$
Plano: $\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \dfrac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$
$\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$

73. $F(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 - z^2$
$F_x(x, y, z) = 2a^2x$
$F_y(x, y, z) = 2b^2y$
$F_z(x, y, z) = -2z$
Plano: $2a^2x_0(x - x_0) + 2b^2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$
$a^2x_0x + b^2y_0y - z_0z = 0$
Por lo tanto, el plano pasa por el origen.

75. *a)* $P_1(x, y) = 1 + x - y$
b) $P_2(x, y) = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$
c) Si $x = 0$, $P_2(0, y) = 1 - y + \frac{1}{2}y^2$.
Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^{-y}.
Si $y = 0$, $P_2(x, 0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.
Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^x.
d)

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0	1	1	1
0	0.1	0.9048	0.9000	0.9050
0.2	0.1	1.1052	1.1000	1.1050
0.2	0.5	0.7408	0.7000	0.7450
1	0.5	1.6487	1.5000	1.6250

e)



77. Demostración

Sección 13.8 (página 960)

1. Mínimo relativo: $(1, 3, 0)$ **3.** Mínimo relativo: $(0, 0, 1)$

5. Mínimo relativo: $(-1, 3, -4)$

7. Mínimo relativo: $(1, 1, 11)$

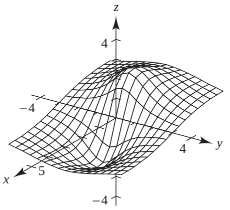
9. Máximo relativo: $(5, -1, 2)$

11. Mínimo relativo: $(3, -4, -5)$

13. Mínimo relativo: $(0, 0, 0)$

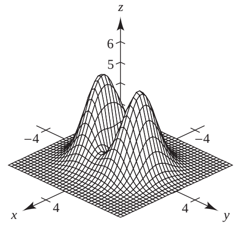
15. Máximo relativo: $(0, 0, 4)$

17.



Máximo relativo: $(-1, 0, 2)$
Mínimo relativo: $(1, 0, -2)$

19.



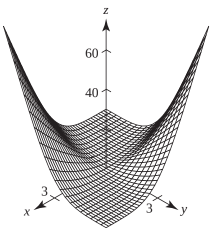
Mínimo relativo: $(0, 0, 0)$
Máximos relativos: $(0, \pm 1, 4)$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, 1)$

21. Máximo relativo: $(40, 40, 3\,200)$

23. Puntos silla: $(0, 0, 0)$ **25.** Puntos silla: $(1, -1, -1)$

27. No hay números críticos.

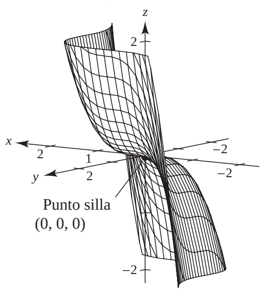
29. z nunca es negativo. Mínimo: $z = 0$ cuando $x = y \neq 0$.



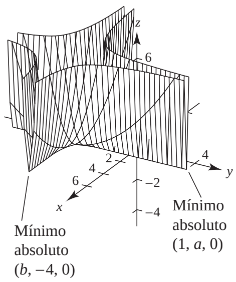
31. Información insuficiente. **33.** Punto silla.

35. $-4 < f_{xy}(3, 7) < 4$

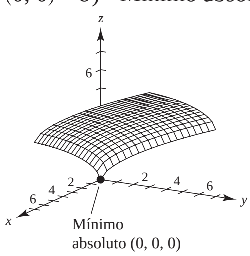
37. *a*) $(0, 0)$ *b*) Punto silla. $(0, 0, 0)$ *c*) $(0, 0)$
d)



39. *a*) $(1, a), (b, -4)$ *b*) Mínimos absolutos: $(1, a, 0), (b, -4, 0)$
c) $(1, a), (b, -4)$ *d*)



41. *a*) $(0, 0)$ *b*) Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$ *c*) $(0, 0)$
d)



43. Mínimo relativo: $(0, 3, -1)$

45. Máximo absoluto: $(4, 0, 21)$
Mínimo absoluto: $(4, 2, -11)$

47. Máximo absoluto: $(0, 1, 10)$
Mínimo absoluto: $(1, 2, 5)$

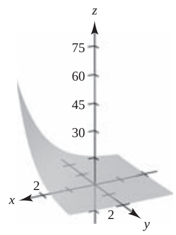
49. Máximos absolutos: $(\pm 2, 4, 28)$
Mínimo absoluto: $(0, 1, -2)$

51. Máximos absolutos: $(-2, -1, 9), (2, 1, 9)$
Mínimos absolutos: $(x, -x, 0),\ |x| \leq 1$

53. Máximo absoluto: $(1, 1, 1)$
Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$

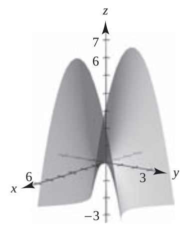
55. El punto A es un punto silla.

57. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



No hay extremos

59. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



Punto silla

61. Falso. Sea $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$ en el punto $(0, 0, 1)$.

63. Falso. Sea $f(x, y) = x^2y^2$ (ver ejemplo 4 de la página 958).

Sección 13.9 (página 966)

1. $\sqrt{3}$ **3.** $\sqrt{7}$ **5.** $x = y = z = 3$ **7.** 10, 10, 10

9. 9 pies × 9 pies × 8.25 pies; \$26.73

11. Sea $a + b + c = k$.

$V = 4\pi abc/3 = \frac{4}{3}\pi ab(k - a - b) = \frac{4}{3}\pi(kab - a^2b - ab^2)$

$$\left.\begin{array}{l} V_a = \frac{4}{3}\pi(kb - 2ab - b^2) = 0 \\ V_b = \frac{4}{3}\pi(ka - a^2 - 2ab) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} kb - 2ab - b^2 = 0 \\ kb - a^2 - 2ab = 0 \end{array}$$

Así, $a = b$ y $b = k/3$. Por tanto, $a = b = c = k/3$.

13. Sean x, y y z la longitud, ancho y altura, respectivamente, y sea V_0 el volumen dado. Entonces $V_0 = xyz$ y $z = V_0/xy$. El área de la superficie es

$S = 2xy + 2yz + 2xz = 2(xy + V_0/x + V_0/y)$.

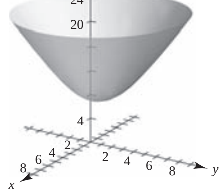
$$\left.\begin{array}{l} S_x = 2(y - V_0/x^2) = 0 \\ S_y = 2(x - V_0/y^2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2y - V_0 = 0 \\ xy^2 - V_0 = 0 \end{array}$$

Así, $x = \sqrt[3]{V_0}, y = \sqrt[3]{V_0}$, y $z = \sqrt[3]{V_0}$.

15. $x_1 = 3; x_2 = 6$ **17.** Demostración

19. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km
$y = \left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)/6 \approx 1.284$ km

21. *a*) $S = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}$



La superficie tiene un mínimo.

b) $S_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}} + \dfrac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}}$

$S_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y-2}{\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}} + \dfrac{y-2}{\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}}$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{j}$

$\theta \approx 186.0°$

d) $t = 1.344$; $(x_2, y_2) \approx (0.05, 0.90)$

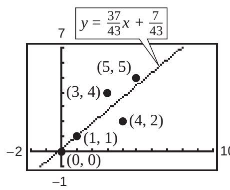
e) $(x_4, y_4) \approx (0.06, 0.45)$; $S = 7.266$

f) $-\nabla S(x, y)$ da la dirección de la máxima tasa de decrecimiento de S. Usar $\nabla S(x, y)$ para encontrar un máximo.

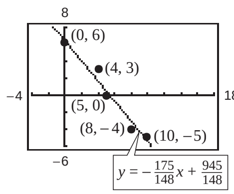
23. Expresar la ecuación a maximizar o minimizar como una función de dos variables. Tomar las derivadas parciales e igualarlas a cero o indefinido para obtener los puntos críticos. Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para extremos relativos utilizando los puntos críticos. Verificar los puntos frontera.

25. *a)* $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$ *b)* $\frac{1}{6}$ **27.** *a)* $y = -2x + 4$ *b)* 2

29. $y = \frac{37}{43}x + \frac{7}{43}$

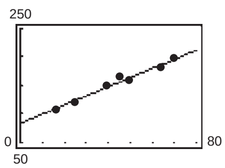


31. $y = -\frac{175}{148}x + \frac{945}{148}$



33. *a)* $y = 1.6x + 84$

b)



c) 1.6

35. $y = 14x + 19$

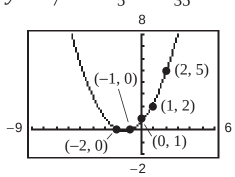
41.4 bushels por acre

37. $a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$

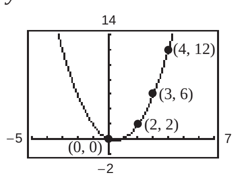
$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i$

39. $y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{26}{35}$

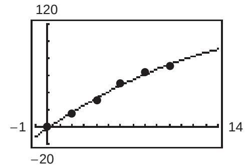


41. $y = x^2 - x$



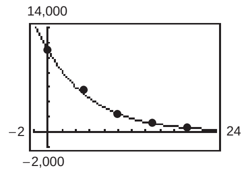
43. *a)* $y = -0.22x^2 + 9.66x - 1.79$

b)



45. *a)* $\ln P = -0.1499h + 9.3018$ *b)* $P = 10{,}957.7e^{-0.1499h}$

c)

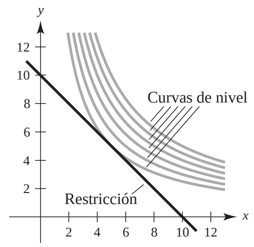


d) Demostración

47. Demostración

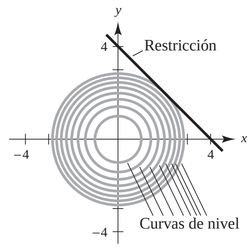
Sección 13.10 (página 976)

1.



$f(5, 5) = 25$

3.



$f(2, 2) = 8$

5. $f(1, 2) = 5$ **7.** $f(25, 50) = 2\,600$

9. $f(1, 1) = 2$ **11.** $f(3, 3, 3) = 27$ **13.** $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

15. Máximos: $f\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = \frac{5}{2}$

$f\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = \frac{5}{2}$

Mínimos: $f\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = -\frac{1}{2}$

17. $f(8, 16, 8) = 1024$ **19.** $\sqrt{2}/2$ **21.** $3\sqrt{2}$ **23.** $\sqrt{11}/2$

25. 0.188 **27.** $\sqrt{3}$ **29.** $(-4, 0, 4)$

31. Los problemas de optimización que tienen restricciones sobre los valores que pueden ser usados para producir las soluciones óptimas se conocen como problemas de optimización restringidos.

33. $\sqrt{3}$ **35.** $x = y = z = 3$

37. 9 pies × 9 pies × 8.25 pies; \$26.73 **39.** $a = b = c = k/3$

41. Demostración **43.** $2\sqrt{3}a/3 \times 2\sqrt{3}b/3 \times 2\sqrt{3}c/3$

45. $\sqrt[3]{360} \times \sqrt[3]{360} \times \frac{4}{3}\sqrt[3]{360}$ pies

47. $r = \sqrt[3]{\dfrac{v_0}{2\pi}}$ y $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{v_0}{2\pi}}$ **49.** Demostración

51. $P(15\,625/18, 3\,125) \approx 226\,869$

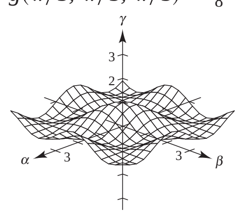
53. $x \approx 191.3$

$y \approx 688.7$

Costo ≈ \$55 095.60

55. *a)* $g(\pi/3, \pi/3, \pi/3) = \frac{1}{8}$

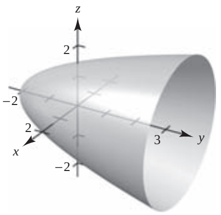
b)



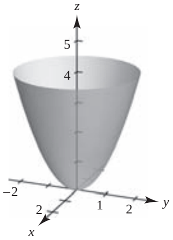
Los valores máximos ocurren cuando $\alpha = \beta$.

Ejercicios de repaso para el capítulo 13 (página 978)

1.



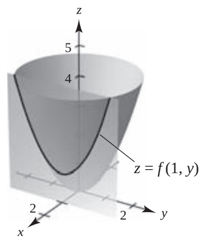
3. *a*)

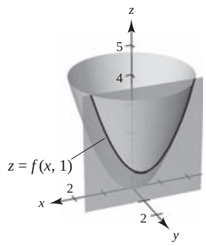


b) *g* es una traslación vertical de *f* dos unidades hacia arriba.

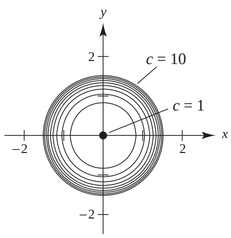
c) *g* es una traslación horizontal de *f* dos unidades hacia la derecha.

d)



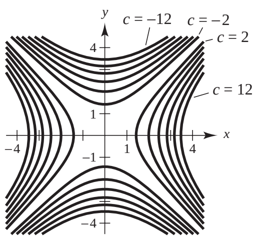


5.



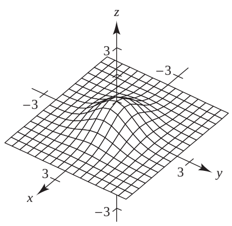
Generado con Mathematica

7.



Generado con Mathematica

9.



11. Límite: $\frac{1}{2}$
Continua excepto en $(0, 0)$

13. Límite: 0
Continua

15. $f_x(x, y) = e^x \cos y$
$f_y(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y$

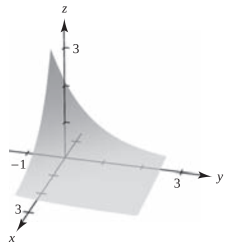
17. $\partial z/\partial x = -e^{-x}$
$\partial z/\partial y = -e^{-y}$

19. $g_x(x, y) = [y(y^2 - x^2)]/(x^2 + y^2)^2$
$g_y(x, y) = [x(x^2 - y^2)]/(x^2 + y^2)^2$

21. $f_x(x, y, z) = -yz/(x^2 + y^2)$
$f_y(x, y, z) = xz/(x^2 + y^2)$
$f_z(x, y, z) = \arctan y/x$

23. $u_x(x, t) = cne^{-n^2t} \cos nx$
$u_t(x, t) = -cn^2e^{-n^2t} \operatorname{sen} nx$

25. Las respuestas varían. Ejemplo:



27. $f_{xx}(x, y) = 6$
$f_{yy}(x, y) = 12y$
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -1$

29. $h_{xx}(x, y) = -y \cos x$
$h_{yy}(x, y) = -x \operatorname{sen} y$
$h_{xy}(x, y) = h_{yx}(x, y) = \cos y - \operatorname{sen} x$

31. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 2 + (-2) = 0$

33. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} + \dfrac{-6x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} = 0$

35. $(xy \cos xy + \operatorname{sen} xy)\, dx + (x^2 \cos xy)\, dy$

37. 0.6538 cm, 5.03% **39.** $\pm\pi$ pulg^3

41. $dw/dt = (8t - 1)/(4t^2 - t + 4)$

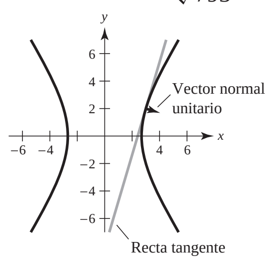
43. $\partial w/\partial r = (4r^2t - 4rt^2 - t^3)/(2r - t)^2$
$\partial w/\partial t = (4r^2t - rt^2 + 4r^3)/(2r - t)^2$

45. $\partial z/\partial x = (-2x - y)/(y + 2z)$
$\partial z/\partial y = (-x - 2y - z)/(y + 2z)$

47. -50 **49.** $\frac{2}{3}$ **51.** $\langle 4, 4\rangle, 4\sqrt{2}$ **53.** $\left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle, \frac{1}{2}$

55. *a*) $54\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ *b*) $\dfrac{27}{\sqrt{793}}\mathbf{i} - \dfrac{8}{\sqrt{793}}\mathbf{j}$ *c*) $y = \dfrac{27}{8}x - \dfrac{65}{8}$

d)

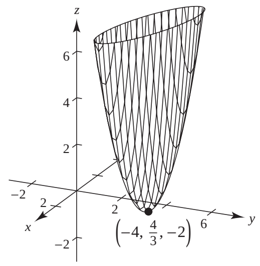


57. Plano tangente: $4x + 4y - z = 8$
Recta normal: $x = 2 + 4t,\ y = 1 + 4t,\ z = 4 - t$

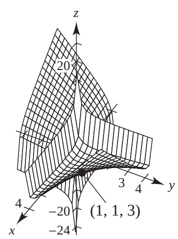
59. Plano tangente: $z = 4$
Recta normal: $x = 2,\ y = -3,\ z = 4 + t$

61. $(x - 2)/1 = (y - 2)/1 = (z - 5)/(-4)$ **63.** $\theta \approx 36.7°$

65. Mínimo relativo: $\left(-4, \frac{4}{3}, -2\right)$



67. Mínimo relativo: $(1, 1, 3)$

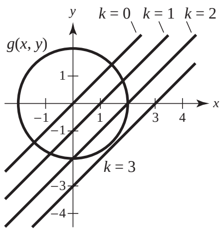


69. Las curvas de nivel son hipérbolas. El punto crítico (0,0) puede ser un punto silla o un extremo.

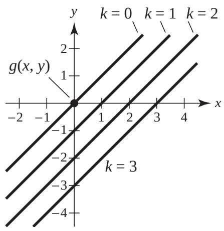
71. $x_1 = 94, x_2 = 157$ **73.** $f(49.4, 253) = 13\,201.8$
75. *a*) $y = 0.004x^2 + 0.07x + 19.4$ *b*) 50.6 kg
77. Máximo: $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
79. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km; $y = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$ km;
$z = \left(60 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)/6 \approx 8.716$ km

SP Solución de problemas (página 981)

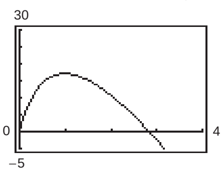
1. *a*) 12 unidades cuadradas *b*) Demostración *c*) Demostración
3. *a*) $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$
b) $x_0y_0z_0 = 1 \implies z_0 = 1/x_0y_0$
Entonces el plano tangente es
$$y_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(x - x_0) + x_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(y - y_0) + x_0y_0\left(z - \frac{1}{x_0y_0}\right) = 0.$$
Intersecciones: $(3x_0, 0, 0)$, $(0, 3y_0, 0)$, $\left(0, 0, \dfrac{3}{x_0y_0}\right)$
$V = \frac{1}{3}\,bh = \frac{9}{2}$

5. *a*)


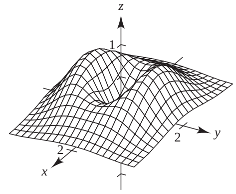
Valor máximo: $2\sqrt{2}$

b)


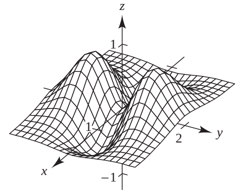
Valores máximo y mínimo: 0
El método de los multiplicadores de Lagrange no se aplica porque $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

7. $2\sqrt[3]{150} \times 2\sqrt[3]{150} \times 5\sqrt[3]{150}/3$
9. *a*)
$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= xCy^{1-a}ax^{a-1} + yCx^a(1 - a)y^{1-a-1} \\ &= ax^aCy^{1-a} + (1 - a)x^aC(y^{1-a}) \\ &= Cx^ay^{1-a}[a + (1 - a)] \\ &= Cx^ay^{1-a} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= C(tx)^a(ty)^{1-a} \\ &= Ctx^ay^{1-a} \\ &= tCx^ay^{1-a} \\ &= tf(x, y) \end{aligned}$$
11. *a*) $x = 32\sqrt{2}t$
$y = 32\sqrt{2}t - 16t^2$
b) $\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x + 50}\right) = \arctan\left(\dfrac{32\sqrt{2}t - 16t^2}{32\sqrt{2}t + 50}\right)$
c) $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-16\left(8\sqrt{2}t^2 + 25t - 25\sqrt{2}\right)}{64t^4 - 256\sqrt{2}t^3 + 1024t^2 + 800\sqrt{2}t + 625}$
d)


No; la razón de cambio de α es mayor cuando el proyectil está más cerca de la cámara.
e) α es máximo cuando $t = 0.98$ segundos.
No; el proyectil alcanza su máxima altura cuando $t = \sqrt{2} \approx 1.41$ segundos.

13. *a*)


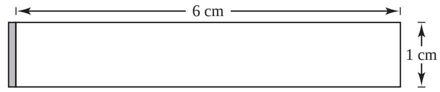
Mínimo: $(0, 0, 0)$
Máximos: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, e^{-1})$

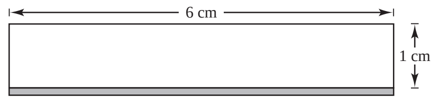
b)


Mínimos: $(\pm 1, 0, -e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
Puntos silla: $(0, 0, 0)$

c) $\alpha > 0$
Mínimo: $(0, 0, 0)$
Máximos: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$

$\alpha < 0$
Mínimos: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: $(0, 0, 0)$

15. *a*)


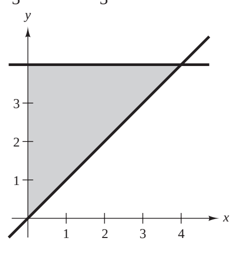
b)


c) Altura
d) $dl = 0.01, dh = 0$: $dA = 0.01$
$dl = 0, dh = 0.01$: $dA = 0.06$
17 a 19. Demostraciones

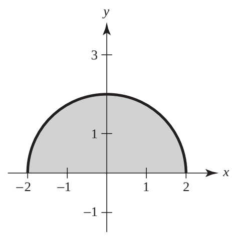
Capítulo 14

Sección 14.1 (página 990)

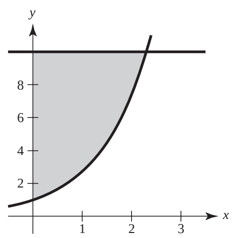
1. $2x^2$ **3.** $y\ln(2y)$ **5.** $(4x^2 - x^4)/2$
7. $(y/2)[(\ln y)^2 - y^2]$ **9.** $x^2(1 - e^{-x^2} - x^2e^{-x^2})$ **11.** 3
13. $\frac{8}{3}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 2 **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** 1 629 **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** 4
27. $\pi/2$ **29.** $\pi^2/32 + \frac{1}{8}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** Diverge **35.** 24
37. $\frac{16}{3}$ **39.** $\frac{8}{3}$ **41.** 5 **43.** πab **45.** $\frac{9}{2}$

47.


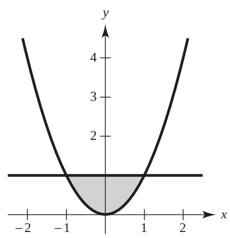
$$\int_0^4 \int_x^4 f(x, y)\,dy\,dx$$

49.


$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

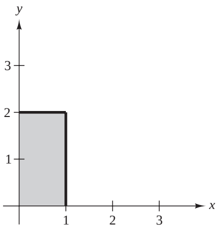
51.


$$\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} f(x, y)\,dy\,dx$$

53.


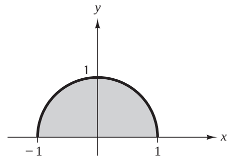
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$$

55.



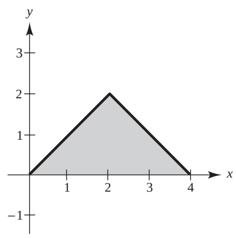
$$\int_0^1\int_0^2 dy\,dx = \int_0^2\int_0^1 dx\,dy = 2$$

57.



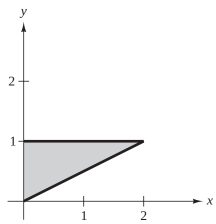
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = \frac{\pi}{2}$$

59.



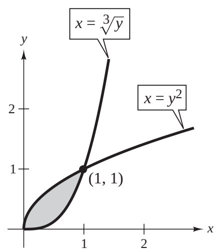
$$\int_0^2\int_0^x dy\,dx + \int_2^4\int_0^{4-x} dy\,dx = \int_0^2\int_y^{4-y} dx\,dy = 4$$

61.



$$\int_0^2\int_{x/2}^1 dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2y} dx\,dy = 1$$

63.

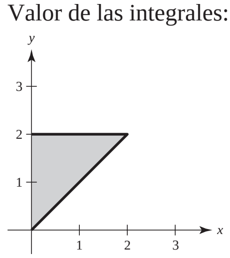


$$\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy = \int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{5}{12}$$

65. La primera integral surge utilizando rectángulos representativos verticales. Las dos segundas surgen utilizando rectángulos representativos horizontales.

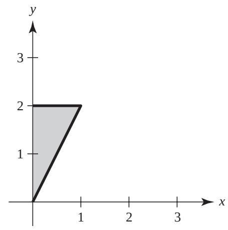
Valor de las integrales: $15\,625\pi/24$

67.



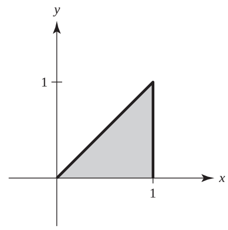
$$\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx = \frac{26}{9}$$

69.



$$\int_0^1\int_{2x}^2 4e^{y^2}\,dy\,dx = e^4 - 1 \approx 53.598$$

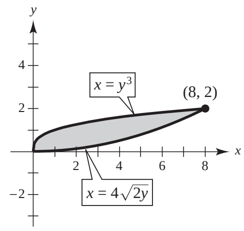
71.



$$\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}(1-\cos 1) \approx 0.230$$

73. $\frac{1\,664}{105}$ **75.** $(\ln 5)^2$

77. *a*)



b) $\displaystyle\int_0^8\int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} (x^2y - xy^2)\,dy\,dx$ *c*) $67\,520/693$

79. 20.5648 **81.** $15\pi/2$

83. Una integral iterada es una integral de una función de varias variables. Se integra con respecto a una variable mientras las otras variables se mantienen constantes.

85. Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular.

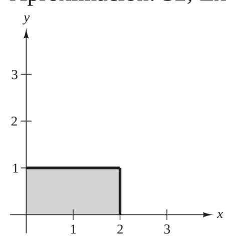
87. Verdadero

Sección 14.2 (página 1000)

1. 24 (la aproximación es exacta)

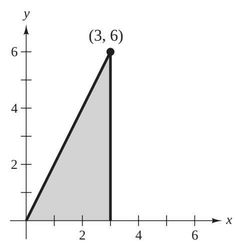
3. Aproximación: 52; Exacto: $\frac{160}{3}$ **5.** 400; 272

7.



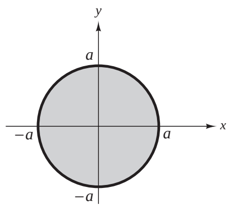
8

9.



36

11.



0

13. $\displaystyle\int_0^3\int_0^5 xy\,dy\,dx = \frac{225}{4}$

$\displaystyle\int_0^5\int_0^3 xy\,dx\,dy = \frac{225}{4}$

15. $\displaystyle\int_1^2\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

$\displaystyle\int_1^2\int_1^y \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_2^4\int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

17. $\displaystyle\int_0^1\int_{4-x}^{4-x^2} -2y\,dy\,dx = -\frac{6}{5}$

$\displaystyle\int_3^4\int_{4-y}^{\sqrt{4-y}} -2y\,dx\,dy = -\frac{6}{5}$

19. $\displaystyle\int_0^3\int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx\,dy = 25$

$\displaystyle\int_0^4\int_0^{3x/4} x\,dy\,dx + \int_4^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx = 25$

21. 4 **23.** 4 **25.** 12 **27.** $\frac{3}{8}$ **29.** 1 **31.** $32\sqrt{2}\,\pi/3$

33. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx = \frac{1}{8}$ **35.** $\displaystyle\int_0^2\int_0^4 x^2\,dy\,dx = \frac{32}{3}$

37. $\displaystyle 2\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \frac{2}{3}$

39. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx = \frac{16}{3}$

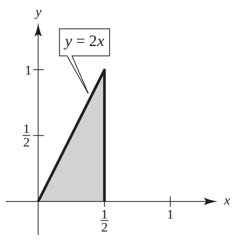
41. $\displaystyle 2\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} (2x-x^2-y^2)\,dy\,dx$

43. $\displaystyle 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

45. $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{2-2(y-1)^2}}^{\sqrt{2-2(y-1)^2}} (4y-x^2-2y^2)\,dx\,dy$

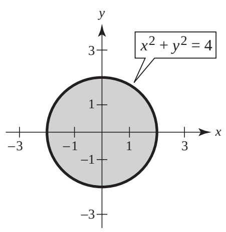
47. $81\pi/2$ **49.** 1.2315 **51.** Demostración

53.



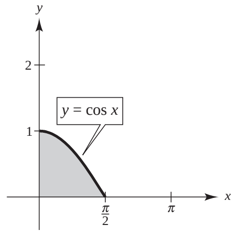
$\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy = 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$

55.



$\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\,dy\,dx = \frac{64}{3}$

57.



$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

59. 2 **61.** $\frac{8}{3}$ **63.** $(e-1)^2$ **65.** 25 645.24

67. Ver la definición de integral doble en la página 994. La integral doble de una función $f(x, y) \geq 0$ sobre la región de integración da el volumen de esa región.

69. *a*) La caída de nieve total en el país *R*

b) El promedio de caída de nieve en el país *R*

71. No; 6π es el valor más grande posible. **73.** Demostración; $\frac{1}{5}$

75. Demostración; $\frac{7}{27}$ **77.** 2 500 m^3 **79.** *a*) 1.784 *b*) 1.788

81. *a*) 11.057 *b*) 11.041 **83.** d

85. Falso. $\displaystyle V = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy.$

87. $\frac{1}{2}(1-e)$ **89.** R: $x^2+y^2 \leq 9$ **91.** ≈ 0.82736

93. Problema Putnam A2, 1989

Sección 14.3 (página 1009)

1. Rectangular **3.** Polar

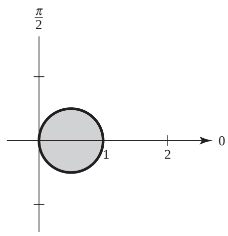
5. La región *R* es un medio círculo de radio 8. Se puede describir en coordenadas polares como

$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 8, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

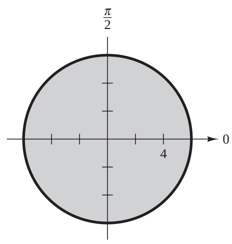
7. La región *R* es una cardioide con $a = b = 3$. Se puede describir en coordenadas polares como

$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 3 + 3\operatorname{sen}\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

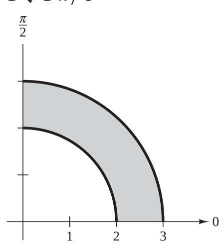
9. $\pi/4$



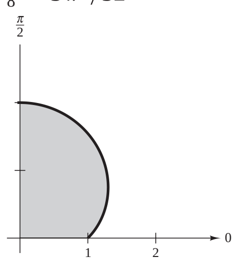
11. 0



13. $5\sqrt{5}\pi/6$



15. $\frac{9}{8} + 3\pi^2/32$



17. $a^3/3$ **19.** 4π **21.** $243\pi/10$ **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** $(\pi/2)\operatorname{sen} 1$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2\,dr\,d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

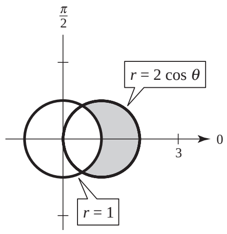
29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = \frac{16}{3}$

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r\theta\,dr\,d\theta = \frac{3\pi^2}{64}$ **33.** $\frac{1}{8}$ **35.** $\frac{250\pi}{3}$

37. $\frac{64}{9}(3\pi - 4)$ **39.** $2\sqrt{4 - 2\sqrt[3]{2}}$ **41.** 1.2858

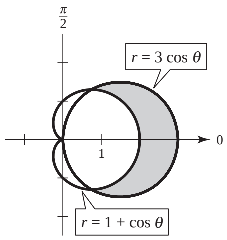
43. 9π **45.** $3\pi/2$ **47.** π

49.



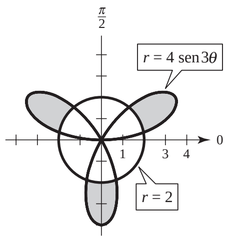
$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

51.



π

53.



$\dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

55. Sea R una región acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = a$ y $\theta = b$. Al utilizar coordenadas polares para evaluar una integral doble sobre R, R puede ser particionada en pequeños sectores polares.

57. Las regiones r-simples tienen límites fijos para θ y límites variables para r.
Las regiones θ-simples tienen límites variables para θ y límites fijos para r.

59. *a*) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$

c) Escoger la integral en el apartado *b*) porque los límites de integración son menos complicados.

61. Insertar un factor de r; sector de un círculo **63.** 56.051 **65.** c

67. Falso. Sea $f(r, \theta) = r - 1$ y sea R un sector donde $0 \le r \le 6$ y $0 \le \theta \le \pi$.

69. *a*) 2π (b) $\sqrt{2\pi}$ **71.** 486 788

73. *a*) $\displaystyle\int_2^4\int_{y/\sqrt{3}}^{y} f\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2}\int_2^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_2^{4/\sqrt{3}}\int_x^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_{4/\sqrt{3}}^{4}\int_x^{4} f\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_{2\csc\theta}^{4\csc\theta} f\,r\,dr\,d\theta$

75. $A = \dfrac{\Delta\theta r_2^{\,2}}{2} - \dfrac{\Delta\theta r_1^{\,2}}{2} = \Delta\theta\left(\dfrac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1) = r\,\Delta r\,\Delta\theta$

Sección 14.4 (página 1018)

1. $m = 4$ **3.** $m = \frac{1}{8}$

5. *a*) $m = ka^2$, $(a/2, a/2)$ *b*) $m = ka^3/2$, $(a/2, 2a/3)$
c) $m = ka^3/2$, $(2a/3, a/2)$

7. *a*) $m = ka^2/2$, $(a/3, 2a/3)$ *b*) $m = ka^3/3$, $(3a/8, 3a/4)$
c) $m = ka^3/6$, $(a/2, 3a/4)$

9. *a*) $\left(\dfrac{a}{2} + 5, \dfrac{a}{2}\right)$ *b*) $\left(\dfrac{a}{2} + 5, \dfrac{2a}{3}\right)$

c) $\left(\dfrac{2(a^2 + 15a + 75)}{3(a + 10)}, \dfrac{a}{2}\right)$

11. $m = k/4$, $(2/3, 8/15)$ **13.** $m = 30k$, $(14/5, 4/5)$

15. *a*) $m = k(e - 1)$, $\left(\dfrac{1}{e - 1}, \dfrac{e + 1}{4}\right)$

b) $m = \dfrac{k}{4}(e^2 - 1)$, $\left(\dfrac{e^2 + 1}{2(e^2 - 1)}, \dfrac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

17. $m = 256k/15$, $(0, 16/7)$ **19.** $m = \dfrac{2kL}{\pi}$, $\left(\dfrac{L}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$

21. $m = \dfrac{k\pi a^2}{8}$, $\left(\dfrac{4\sqrt{2}a}{3\pi}, \dfrac{4a(2 - \sqrt{2})}{3\pi}\right)$

23. $m = \dfrac{k}{8}(1 - 5e^{-4})$, $\left(\dfrac{e^4 - 13}{e^4 - 5}, \dfrac{8}{27}\left[\dfrac{e^6 - 7}{e^6 - 5e^2}\right]\right)$

25. $m = k\pi/3$, $(81\sqrt{3}/(40\pi), 0)$

27. $\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}b/3$ **29.** $\bar{\bar{x}} = a/2$ **31.** $\bar{\bar{x}} = a/2$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{3}h/3$ $\bar{\bar{y}} = a/2$ $\bar{\bar{y}} = a/2$

33. $I_x = kab^4/4$
$I_y = kb^2a^3/6$
$I_0 = (3kab^4 + 2ka^3b^2)/12$
$\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}a/3$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{2}b/2$

35. $I_x = 32k/3$
$I_y = 16k/3$
$I_0 = 16k$
$\bar{\bar{x}} = 2\sqrt{3}/3$
$\bar{\bar{y}} = 2\sqrt{6}/3$

37. $I_x = 16k$
$I_y = 512k/5$
$I_0 = 592k/5$
$\bar{\bar{x}} = 4\sqrt{15}/5$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{6}/2$

39. $I_x = 3k/56$
$I_y = k/18$
$I_0 = 55k/504$
$\bar{\bar{x}} = \sqrt{30}/9$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{70}/14$

41. $\displaystyle 2k\int_{-b}^{b}\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} (x - a)^2\,dy\,dx = \frac{k\pi b^2}{4}(b^2 + 4a^2)$

43. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} kx(x - 6)^2\,dy\,dx = \frac{42\,752k}{315}$

45. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} k(a - y)(y - a)^2\,dy\,dx = ka^5\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{17}{15}\right)$

47. Ver definiciones en la página 1014. **49.** Las respuestas varían.

51. $L/3$ **53.** $L/2$ **55.** Demostración

Sección 14.5 (página 1025)

1. 24 **3.** 12π **5.** $\frac{1}{2}\left[4\sqrt{17} + \ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\right]$

7. $\frac{4}{27}\left(31\sqrt{31} - 8\right)$ **9.** $\sqrt{2} - 1$ **11.** $\sqrt{2}\pi$

13. $2\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ **15.** $48\sqrt{14}$ **17.** 20π

19. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{5 + 4x^2}\,dy\,dx = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{12} \approx 1.3183$

21. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx$
$\displaystyle = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \approx 117.3187$

23. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx \approx 1.8616$ **25.** e

27. 2.0035 **29.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9(x^2-y)^2+9(y^2-x)^2}\,dy\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dy\,dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{10}\sqrt{1+e^{2xy}(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

35. Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región cerrada R en el plano xy, entonces el área de la superficie dada por $z=f(x,y)$ sobre la región R es

$$\int\int_R \sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA.$$

37. No. La gráfica no cambia de tamaño ni de forma, sólo de posición. Por lo anterior, el área de la superficie no crece.

39. 16 **41.** (a) $812\pi\sqrt{609}$ cm^3 (b) $100\pi\sqrt{609}$ cm^2

Sección 14.6 (página 1035)

1. 18 **3.** $\frac{1}{10}$ **5.** $\frac{15}{2}(1-1/e)$ **7.** $-\frac{40}{3}$ **9.** $\frac{324}{5}$

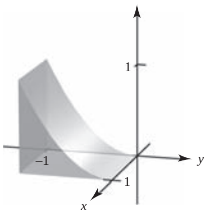
11. 2.44167 **13.** $\displaystyle V=\int_0^5\int_0^{5-x}\int_0^{5-x-y}dz\,dy\,dx$

15. $\displaystyle V=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\int_{-\sqrt{6-y^2}}^{\sqrt{6-y^2}}\int_0^{6-x^2-y^2}dz\,dx\,dy$

17. $\displaystyle V=\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{80-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx$

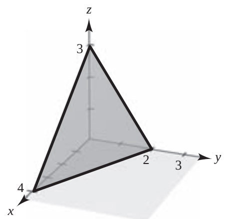
19. $\frac{256}{15}$ **21.** $4\pi a^3/3$ **23.** $\frac{256}{15}$ **25.** 10

27.



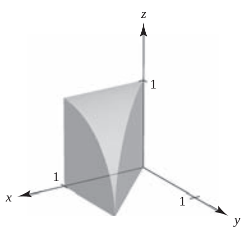
$\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{z}}dy\,dz\,dx$

29.



$\displaystyle\int_0^3\int_0^{(12-4z)/3}\int_0^{(12-4z-3x)/6}dy\,dx\,dz$

31.



$\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-y^2}}dz\,dy\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^3 xyz\,dz\,dy\,dx,\ \int_0^1\int_y^1\int_0^3 xyz\,dz\,dx\,dy,$

$\displaystyle\int_0^1\int_0^3\int_0^x xyz\,dy\,dz\,dx,\ \int_0^3\int_0^1\int_0^x xyz\,dy\,dx\,dz,$

$\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_y^1 xyz\,dx\,dy\,dz,\ \int_0^1\int_0^3\int_y^1 xyz\,dx\,dz\,dy$

35. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^4 xyz\,dz\,dy\,dx,\ \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^4 xyz\,dz\,dx\,dy,$

$\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^4\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\,dy\,dz\,dx,\ \int_0^4\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\,dy\,dx\,dz,$

$\displaystyle\int_0^4\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\,dx\,dy\,dz,\ \int_{-3}^{3}\int_0^4\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\,dx\,dz\,dy$

37. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-y^2}dx\,dy\,dz,\ \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-y^2}dx\,dz\,dy,$

$\displaystyle\int_0^1\int_0^{2z-z^2}\int_0^{1-z}1\,dy\,dx\,dz+\int_0^1\int_{2z-z^2}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x}}1\,dy\,dx\,dz,$

$\displaystyle\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-x}}^{1}\int_0^{1-z}1\,dy\,dz\,dx+\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-x}}\int_0^{\sqrt{1-x}}1\,dy\,dz\,dx,$

$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x}}\int_0^{1-y}dz\,dy\,dx$

39. $m=8k$ **41.** $m=128k/3$

$\bar{x}=\frac{3}{2}$ $\qquad\bar{z}=1$

43. $\displaystyle m=k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy\,dz\,dy\,dx$

$\displaystyle M_{yz}=k\int_0^b\int_0^b\int_0^b x^2y\,dz\,dy\,dx$

$\displaystyle M_{xz}=k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xy^2\,dz\,dy\,dx$

$\displaystyle M_{xy}=k\int_0^b\int_0^b\int_0^b xyz\,dz\,dy\,dx$

45. $\bar{x}$ será más grande que 2, mientras que $\bar{y}$ y $\bar{z}$ no cambian.

47. $\bar{x}$ y $\bar{z}$ no cambian, mientras que $\bar{y}$ será más grande que 0.

49. $(0,0,3h/4)$ **51.** $\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$ **53.** $\left(5,6,\frac{5}{4}\right)$

55. *a*) $I_x=2ka^5/3$ $\quad$ *b*) $I_x=ka^8/8$

$I_y=2ka^5/3$ $\quad I_y=ka^8/8$

$I_z=2ka^5/3$ $\quad I_z=ka^8/8$

57. *a*) $I_x=256k$ $\quad$ *b*) $I_x=2\,048\,k/3$

$I_y=512k/3$ $\quad I_y=1\,024\,k/3$

$I_z=256k$ $\quad I_z=2\,048\,k/3$

59. Demostración **61.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

63. *a*) $\displaystyle m=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}kz\,dz\,dy\,dx$

b) $\bar{x}=\bar{y}=0$, por simetría

$\displaystyle\bar{z}=\frac{1}{m}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}kz^2\,dz\,dy\,dx$

c) $\displaystyle I_z=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}kz(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$

65. Ver “Definición de Integral Triple” en la página 1027 y el teorema 14.4, “Evaluación por integrales iteradas” en la página 1028.

67. *a*) El sólido *B*.

b) El sólido *B* tiene el momento de inercia mayor porque es más denso.

c) El sólido *A* llegará primero abajo. Como el sólido *B* tiene un momento de inercia mayor, tiene una resistencia mayor al movimiento de rotación.

69. $\frac{13}{3}$ **71.** $\frac{3}{2}$

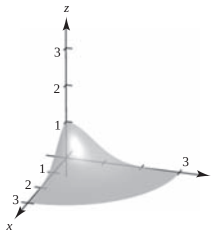
73. Q: $3z^2 + y^2 + 2x^2 \le 1$; $4\sqrt{6}\pi/45 \approx 0.684$

75. $a = 2, \frac{16}{3}$ **77.** Problema Putnam B1, 1965

Sección 14.7 (página 1043)

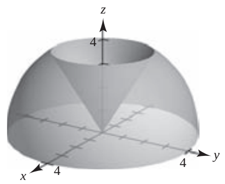
1. 27 **3.** $\frac{52}{45}$ **5.** $\pi/8$ **7.** $\pi(e^4 + 3)$

9.



$(1 - e^{-9})\pi/4$

11.



$64\sqrt{3}\pi/3$

13. Cilíndrica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(1/2)}\int_0^{4\sec\phi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$\displaystyle + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/2}\int_0^{\cot\phi\csc\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 0$

15. Cilíndrica: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 0$

17. $(2a^3/9)(3\pi - 4)$ **19.** $\pi/16$ **21.** $(2a^3/9)(3\pi - 4)$

23. $48k\pi$ **25.** $\pi r_0^2 h/3$ **27.** $(0, 0, h/5)$

29. $I_z = 4k\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0}\int_0^{h(r_0-r)/r_0} r^3\, dz\, dr\, d\theta = 3mr_0^2/10$

31. Demostración **33.** $9\pi\sqrt{2}$ **35.** $16\pi^2$

37. $k\pi a^4$ **39.** $(0, 0, 3r/8)$ **41.** $k\pi/192$

43. Rectangulares a cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$

$\tan\theta = y/x$

$z = z$

Cilíndricas a rectangulares: $x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$z = z$

45. $\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$

47. *a*) r constante: cilindro circular recto en torno al eje z.

θ constante: plano paralelo al eje z.

z constante: plano paralelo al plano xy.

b) ρ constante: esfera.

θ constante: plano paralelo al eje z.

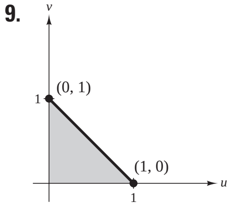
ϕ constante: cono.

49. $\frac{1}{2}\pi^2 a^4$ **51.** Problema Putnam A1, 2006

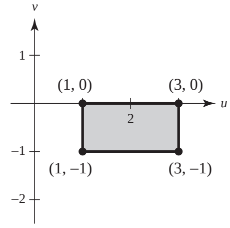
Sección 14.8 (página 1050)

1. $-\frac{1}{2}$ **3.** $1 + 2v$ **5.** 1 **7.** $-e^{2u}$

9.



11.



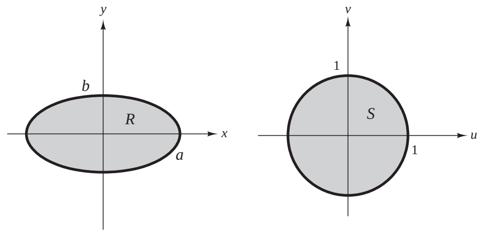
13. $\displaystyle\int_R\int 3xy\, dA = \int_{-2/3}^{2/3}\int_{1-x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx$

$\displaystyle + \int_{2/3}^{4/3}\int_{(1/2)x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx + \int_{4/3}^{8/3}\int_{(1/2)x}^{4-x} 3xy\, dy\, dx = \frac{164}{9}$

15. $\frac{8}{3}$ **17.** 36 **19.** $(e^{-1/2} - e^{-2})\ln 8 \approx 0.9798$ **21.** 96

23. $12(e^4 - 1)$ **25.** $\frac{100}{9}$ **27.** $\frac{2}{5}a^{5/2}$ **29.** Uno

31. *a*)



b) ab *c*) πab

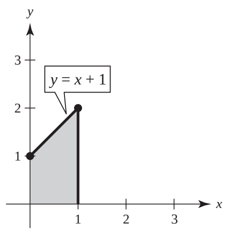
33. Ver la "Definición de jacobiano" en la página 1045. **35.** $u^2 v$

37. $-uv$ **39.** $-\rho^2\operatorname{sen}\phi$ **41.** Problema Putnam A2, 1994

Ejercicios de repaso para el capítulo 14 (página 1052)

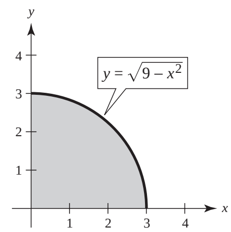
1. $x - x^3 + x^3\ln x^2$

3.



$\frac{29}{6}$

5.



36

7. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{(3-x)/3} dy\, dx = \int_0^1\int_0^{3-3y} dx\, dy = \frac{3}{2}$

9. $\displaystyle\int_{-5}^{3}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy\, dx$

$\displaystyle = \int_{-5}^{-4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy + \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} dx\, dy$

$\displaystyle + \int_4^5\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy$

$= 25\pi/2 + 12 + 25 \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \approx 67.36$

11. $\displaystyle 4\int_0^1\int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{(1-\sqrt{1-4y^2})/2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{1-4y^2})/2}} dx\, dy = \frac{4}{3}$