# 2.3 Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior

- Encontrar la derivada de una función por la regla del producto.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del cociente.
- Encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas.
- Encontrar las derivadas de orden superior de una función.

## La regla del producto

En la sección 2.2 se vio que la derivada de una suma de dos funciones es simplemente la suma de sus derivadas. La regla para derivar el producto de dos funciones no es tan simple.

**TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO**

El producto de dos funciones derivables $f$ y $g$ también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

**NOTA** Algunas personas prefieren la siguiente versión de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La ventaja de esta forma radica en que se puede generalizar con facilidad a multiplicaciones con tres o más factores. ■

**DEMOSTRACIÓN** Algunas demostraciones matemáticas, como en el caso de la regla de la suma, son directas. Otras requieren pasos inteligentes cuyo motivo puede resultar imperceptible para el lector. Esta demostración presenta uno de esos pasos, sumar y restar una misma cantidad, la cual se muestra en distinto color.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Observar que $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ porque se considera que $f$ es derivable y, por tanto, continua.

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores. Por ejemplo, si $f$, $g$ y $h$ son funciones derivables de $x$, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Por ejemplo, la derivada de $y = x^2 \operatorname{sen} x \cos x$ es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)\\
&= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x).
\end{aligned}$$

**NOTA** La prueba de la regla del producto para productos de más de dos factores se deja al lector como ejercicio (ver el ejercicio 141). ■

**LA REGLA DEL PRODUCTO**
Cuando Leibniz elaboró originalmente una fórmula para la regla del producto, lo hizo motivado por la expresión

$$(x + dx)(y + dy) - xy$$

de la cual restó $dx\,dy$ (considerándolos despreciables) y calculando la forma diferencial $x\,dy + y\,dx$. Esta derivación tuvo como resultado la forma tradicional de la regla del producto.
(*Fuente*: *The History of Mathematics* de David M. Burton)

En términos generales, la derivada del producto de dos funciones no está dada por el producto de sus derivadas. Para observarlo basta con comparar el producto de las derivadas de $f(x) = 3x - 2x^2$ y $g(x) = 5 + 4x$ con la derivada obtenida en el ejemplo 1.

### EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$.

**Solución**

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\text{Primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}^{\text{Derivada de la segunda}} + \overbrace{(5 + 4x)}^{\text{Segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{\text{Derivada de la primera}} && \text{Aplicar la regla del producto.} \\ &= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x) \\ &= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2) \\ &= -24x^2 + 4x + 15 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se cuenta con la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Sin ella se escribiría

$$\begin{aligned} D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] &= D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x] \\ &= -24x^2 + 4x + 15. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, se debe utilizar la regla del producto.

### EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 3x^2 \operatorname{sen} x$.

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[3x^2 \operatorname{sen} x] &= 3x^2 \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[3x^2] && \text{Aplicar la regla del producto.} \\ &= 3x^2 \cos x + (\operatorname{sen} x)(6x) \\ &= 3x^2 \cos x + 6x \operatorname{sen} x \\ &= 3x(x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

### EJEMPLO 3 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$.

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(2x)\left(\frac{d}{dx}[\cos x]\right) + (\cos x)\left(\frac{d}{dx}[2x]\right)}^{\text{Regla del producto}} - \overbrace{2\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x]}^{\text{Regla del múltiplo constante}} \\ &= (2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x) \\ &= -2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

**NOTA** Observar que en el ejemplo 3 se usa la regla del producto cuando ambos factores son variables, y la del múltiplo constante cuando uno de ellos es constante.

## La regla del cociente

**TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE**

El cociente $f/g$ de dos funciones derivables $f$ y $g$ también es derivable para todos los valores de $x$ para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de $f/g$ se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

**DEMOSTRACIÓN** Al igual que en la demostración del teorema 2.7, la clave radica en sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \qquad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)}$$

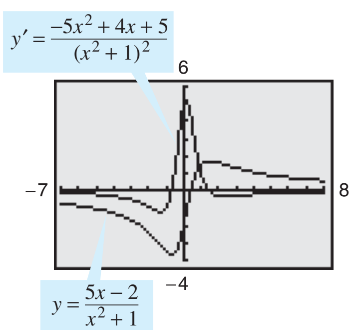
$$= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Observar que $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ porque se considera que $g$ es derivable y por tanto es continua.

**TECNOLOGÍA** En una herramienta de graficación se pueden comparar las gráficas de una función y de su derivada. Por ejemplo, en la figura 2.22, la gráfica de la función del ejemplo 4 parece incluir dos puntos con rectas tangentes horizontales. ¿Cuáles son los valores de $y'$ en dichos puntos?




Comparación gráfica de una función y su derivada
**Figura 2.22**

### *EJEMPLO 4* Aplicación de la regla del cociente

Encontrar la derivada de $y = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 1}$.

**Solución**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x-2}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}[5x-2] - (5x-2)\dfrac{d}{dx}[x^2+1]}{(x^2+1)^2} \qquad \text{Aplicar la regla del cociente.}$$

$$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+5) - (10x^2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$

Observar el uso de los paréntesis en el ejemplo 4. Es recomendable utilizar paréntesis en *todos* los problemas de derivación. Por ejemplo, cuando se usa la regla del cociente, es conveniente encerrar todo factor y derivada en un paréntesis y prestar especial atención a la resta exigida en el numerador.

Al presentar las reglas de derivación en la sección precedente, se hizo hincapié en la necesidad de reescribir *antes* de derivar. El ejemplo siguiente ilustra este aspecto en relación con la regla del cociente.

### *EJEMPLO 5* Reescribir antes de derivar

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - (1/x)}{x + 5}$ en $(-1, 1)$.

**Solución** Comenzar por reescribir la función.

$$f(x) = \frac{3 - (1/x)}{x + 5} \qquad \text{Función original.}$$

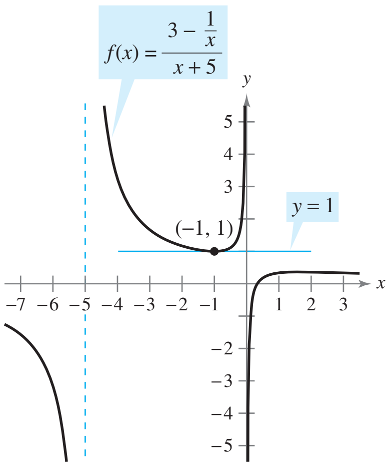
$$= \frac{x\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x(x + 5)} \qquad \text{Multiplicar por } x \text{ numerador y denominador,}$$

$$= \frac{3x - 1}{x^2 + 5x} \qquad \text{Reescribir.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{(3x^2 + 15x) - (6x^2 + 13x - 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2} \qquad \text{Simplificar.}$$




La recta $y = 1$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-1, 1)$
**Figura 2.23**

Con objeto de encontrar la pendiente en $(-1, 1)$, evaluar $f'(-1)$.

$$f'(-1) = 0 \qquad \text{Pendiente de la gráfica en } (-1, 1).$$

Luego, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se puede determinar que la ecuación de la recta tangente en ese punto es $y = 1$. Ver la figura 2.23.

No todo cociente requiere ser derivado mediante la regla del cociente. Por ejemplo, cada uno de los cocientes del ejemplo siguiente se puede considerar como el producto de una constante por una función de $x$, de modo que es más sencillo aplicar la regla del múltiplo constante.

### *EJEMPLO 6* Aplicación de la regla del múltiplo constante

| | *Función original* | *Reescribir* | *Derivar* | *Simplificar* |
|---|---|---|---|---|
| ***a)*** | $y = \dfrac{x^2 + 3x}{6}$ | $y = \dfrac{1}{6}(x^2 + 3x)$ | $y' = \dfrac{1}{6}(2x + 3)$ | $y' = \dfrac{2x + 3}{6}$ |
| ***b)*** | $y = \dfrac{5x^4}{8}$ | $y = \dfrac{5}{8}x^4$ | $y' = \dfrac{5}{8}(4x^3)$ | $y' = \dfrac{5}{2}x^3$ |
| ***c)*** | $y = \dfrac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$ | $y = -\dfrac{3}{7}(3 - 2x)$ | $y' = -\dfrac{3}{7}(-2)$ | $y' = \dfrac{6}{7}$ |
| ***d)*** | $y = \dfrac{9}{5x^2}$ | $y = \dfrac{9}{5}(x^{-2})$ | $y' = \dfrac{9}{5}(-2x^{-3})$ | $y' = -\dfrac{18}{5x^3}$ |

**NOTA** Para distinguir la ventaja de la regla del múltiplo constante en ciertos cocientes, tratar de calcular las derivadas del ejemplo 6 mediante la regla del cociente. Se llegará al mismo resultado, pero con un esfuerzo mucho mayor. ■

En la sección 2.2 se demostró la regla de la potencia sólo para exponentes $n$ enteros mayores que 1. En el ejemplo que sigue se amplía esa demostración a exponentes enteros negativos.

### EJEMPLO 7 Demostración de la regla de la potencia (exponentes enteros negativos)

Si $n$ es un entero negativo, existe un entero positivo $k$ tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]\\ &= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} && \text{Regla del cociente y regla de la potencia.}\\ &= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}\\ &= -kx^{-k-1}\\ &= nx^{n-1}. && n = -k.\end{aligned}$$

De tal modo, la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \qquad \text{Regla de la potencia.}$$

es válida para todo entero. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se pide demostrar el caso en el que $n$ es cualquier número racional.

## Derivadas de las funciones trigonométricas

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la regla del cociente permite establecer las de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

**TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

**DEMOSTRACIÓN** Considerando $\tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y aplicando la regla del cociente, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \text{Aplicar la regla del cociente.}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x.\end{aligned}$$

La demostración de las otras tres partes del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 89).

## EJEMPLO 8 Derivación de funciones trigonométricas

NOTA Debido a las identidades trigonométricas, la derivada de una función trigonométrica puede adoptar diversas formas. Esto complica la comparación de las soluciones obtenidas por el lector con las propuestas al final del libro.

| | *Función* | *Derivada* |
|---|---|---|
| ***a***) | $y = x - \tan x$ | $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$ |
| ***b***) | $y = x \sec x$ | $y' = x(\sec x \tan x) + (\sec x)(1)$ <br> $= (\sec x)(1 + x \tan x)$ |

## EJEMPLO 9 Diferentes formas de una derivada

Derivar ambas formas de $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \csc x - \cot x.$

**Solución**

***Primera forma:*** $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

***Segunda forma:*** $y = \csc x - \cot x$

$$y' = -\csc x \cot x + \csc^2 x$$

Para demostrar que ambas derivadas son idénticas, basta escribir

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

$$= \csc^2 x - \csc x \cot x.$$

El siguiente compendio muestra que gran parte del trabajo necesario para obtener la forma simplificada de una derivada se debe hacer *después* de derivar. Observar que dos características de una forma simplificada son la ausencia de exponentes negativos y el agrupamiento de términos semejantes.

| | $f'(x)$ tras derivar | $f'(x)$ tras simplificar |
|---|---|---|
| **Ejemplo 1** | $(3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$ | $-24x^2 + 4x + 15$ |
| **Ejemplo 3** | $(2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)$ | $-2x \operatorname{sen} x$ |
| **Ejemplo 4** | $\dfrac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$ | $\dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2}$ |
| **Ejemplo 5** | $\dfrac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$ | $\dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$ |
| **Ejemplo 9** | $\dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$ | $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ |

## Derivadas de orden superior

Así como al derivar una función posición se obtiene una función velocidad, al derivar esta última se obtiene una función **aceleración**. En otras palabras, la función aceleración es la *segunda* derivada de la función posición.

$$
\begin{aligned}
s(t) & \qquad \text{Función posición.}\\
v(t) = s'(t) & \qquad \text{Función velocidad.}\\
a(t) = v'(t) = s''(t) & \qquad \text{Función aceleración.}
\end{aligned}
$$

**NOTA** La segunda derivada de $f$ es la derivada de la primera derivada de $f$. ■

La función dada por $a(t)$ es la **segunda derivada** de $s(t)$ y se denota como $s''(t)$.

La segunda derivada es un ejemplo de **derivada de orden superior**. Se puede definir derivadas de cualquier orden entero positivo. Por ejemplo, la **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como se muestra a continuación.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Primera derivada:*** | $y'$, | $f'(x)$, | $\dfrac{dy}{dx}$, | $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$, | $D_x[y]$ |
| ***Segunda derivada:*** | $y''$, | $f''(x)$, | $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, | $\dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$, | $D_x^2[y]$ |
| ***Tercera derivada:*** | $y'''$, | $f'''(x)$, | $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, | $\dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$, | $D_x^3[y]$ |
| ***Cuarta derivada:*** | $y^{(4)}$, | $f^{(4)}(x)$, | $\dfrac{d^4y}{dx^4}$, | $\dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$, | $D_x^4[y]$ |
| $\vdots$ | | | | | |
| ***n-ésima derivada:*** | $y^{(n)}$, | $f^{(n)}(x)$, | $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, | $\dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$, | $D_x^n[y]$ |

### *EJEMPLO 10* Aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

donde $s(t)$ es la altura en metros y $t$ el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna?

**Solución** Para calcular la aceleración, derivar dos veces la función posición.

$$
\begin{aligned}
s(t) &= -0.81t^2 + 2 && \text{Función posición.}\\
s'(t) &= -1.62t && \text{Función velocidad.}\\
s''(t) &= -1.62 && \text{Función aceleración.}
\end{aligned}
$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de $-1.62$ m/s$^2$. Puesto que la aceleración de la gravedad en la Tierra es de $-9.8$ m/s$^2$, la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} &= \frac{-9.8}{-1.62}\\
&\approx 6.0.
\end{aligned}
$$

Seth Resnick/Getty Images

**La Luna**

La masa de la Luna es de $7.349 \times 10^{22}$ kg y la de la Tierra $5.976 \times 10^{24}$ kg. El radio de la Luna es 1 737 km y el de la Tierra 6 378 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6\,378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1\,737^2} \approx 6.0.$$

## 2.3 Ejercicios

**En los ejercicios 1 a 6, utilizar la regla del producto para derivar la función.**

1. $g(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$
2. $f(x) = (6x + 5)(x^3 - 2)$
3. $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$
4. $g(s) = \sqrt{s}(s^2 + 8)$
5. $f(x) = x^3 \cos x$
6. $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

**En los ejercicios 7 a 12, utilizar la regla del cociente para derivar la función.**

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
8. $g(t) = \dfrac{t^2 + 4}{5t - 3}$
9. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$
10. $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s} - 1}$
11. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
12. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^3}$

**En los ejercicios 13 a 18, encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.**

| | *Función* | *Valor de c* |
|---|---|---|
| 13. | $f(x) = (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)$ | $c = 0$ |
| 14. | $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$ | $c = 1$ |
| 15. | $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$ | $c = 1$ |
| 16. | $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$ | $c = 4$ |
| 17. | $f(x) = x \cos x$ | $c = \dfrac{\pi}{4}$ |
| 18. | $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ | $c = \dfrac{\pi}{6}$ |

**En los ejercicios 19 a 24, completar la tabla sin usar la regla del cociente.**

| | *Función* | *Reescribir* | *Derivar* | *Simplificar* |
|---|---|---|---|---|
| 19. | $y = \dfrac{x^2 + 3x}{7}$ | | | |
| 20. | $y = \dfrac{5x^2 - 3}{4}$ | | | |
| 21. | $y = \dfrac{6}{7x^2}$ | | | |
| 22. | $y = \dfrac{10}{3x^3}$ | | | |
| 23. | $y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$ | | | |
| 24. | $y = \dfrac{5x^2 - 8}{11}$ | | | |

**En los ejercicios 25 a 38, encontrar la derivada de la función algebraica.**

25. $f(x) = \dfrac{4 - 3x - x^2}{x^2 - 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 3}{x^2 - 1}$
27. $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x + 3}\right)$
28. $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{2}{x + 1}\right)$
29. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x}}$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$
31. $h(s) = (s^3 - 2)^2$
32. $h(x) = (x^2 - 1)^2$
33. $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{x - 3}$
34. $g(x) = x^2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$
35. $f(x) = (2x^3 + 5x)(x - 3)(x + 2)$
36. $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x - 1)$
37. $f(x) = \dfrac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$, $c$ es una constante
38. $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$, $c$ es una constante

**En los ejercicios 39 a 54 encontrar la derivada de la función trigonométrica.**

39. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$
40. $f(\theta) = (\theta + 1) \cos \theta$
41. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$
42. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$
43. $f(x) = -x + \tan x$
44. $y = x + \cot x$
45. $g(t) = \sqrt[4]{t} + 6 \csc t$
46. $h(x) = \dfrac{1}{x} - 12 \sec x$
47. $y = \dfrac{3(1 - \operatorname{sen} x)}{2 \cos x}$
48. $y = \dfrac{\sec x}{x}$
49. $y = -\csc x - \operatorname{sen} x$
50. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$
51. $f(x) = x^2 \tan x$
52. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
53. $y = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$
54. $h(\theta) = 5\theta \sec \theta + \theta \tan \theta$

**CAS En los ejercicios 55 a 58, usar un programa de cálculo para derivar las funciones.**

55. $g(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)(2x - 5)$
56. $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}\right)(x^2 + x + 1)$
57. $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$
58. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$

**En los ejercicios 59 a 62, evaluar la derivada de la función en el punto que se indica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.**

| | *Función* | *Punto* |
|---|---|---|
| 59. | $y = \dfrac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$ | $\left(\dfrac{\pi}{6}, -3\right)$ |
| 60. | $f(x) = \tan x \cot x$ | $(1, 1)$ |
| 61. | $h(t) = \dfrac{\sec t}{t}$ | $\left(\pi, -\dfrac{1}{\pi}\right)$ |
| 62. | $f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$ | $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ |

El ícono CAS indica que un ejercicio debe utilizarse con un sistema algebraico por computadora.

**En los ejercicios 63 a 68, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto que se indica, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en ese punto, y *c*) utilizar la función *derivative* para confirmar los resultados.**

**63.** $f(x) = (x^3 + 4x - 1)(x - 2), \quad (1, 4)$

**64.** $f(x) = (x + 3)(x^2 - 2), \quad (-2, 2)$

**65.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}, \quad (-5, 5)$

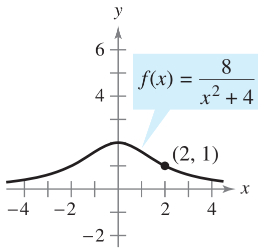
**66.** $f(x) = \dfrac{(x - 1)}{(x + 1)}, \quad \left(2, \dfrac{1}{3}\right)$

**67.** $f(x) = \tan x, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

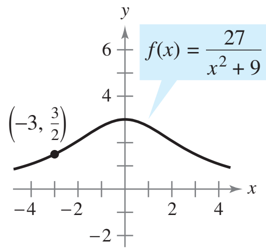
**68.** $f(x) = \sec x, \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right)$

***Curvas famosas*** **En los ejercicios 69 a 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado (las curvas de los ejercicios 69 y 70 se conocen como *Brujas de Agnesi*. Las curvas de los ejercicios 71 y 72 de denominan *serpentinas*).**

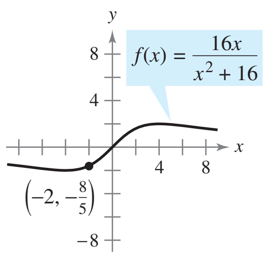
**69.**



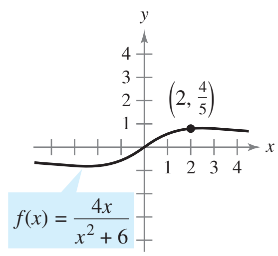

**70.**




**71.**




**72.**




**En los ejercicios 73 a 76, determinar el punto o los puntos donde la gráfica tiene tangente horizontal.**

**73.** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

**74.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

**75.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

**76.** $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 7}$

**77.** ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ paralelas a la recta $2y + x = 6$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

**78.** ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ que pasan por el punto $(-1, 5)$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

**En los ejercicios 79 y 80, verificar que $f'(x) = g'(x)$, y explicar la relación que existe entre *f* y *g*.**

**79.** $f(x) = \dfrac{3x}{x + 2}, \quad g(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$

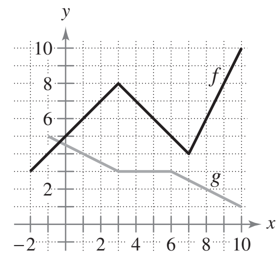
**80.** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - 3x}{x}, \quad g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2x}{x}$

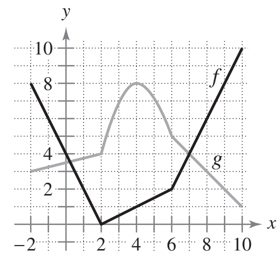
**En los ejercicios 81 y 82, utilizar las gráficas de *f* y *g*, siendo**

$$p(x) = f(x)g(x) \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**81.** *a*) Encontrar $p'(1)$.
*b*) Encontrar $q'(4)$

**82.** *a*) Encontrar $p'(4)$.
*b*) Encontrar $q'(7)$




**83.** ***Área*** La longitud de un rectángulo está dada por $6t + 5$ y su altura es $\sqrt{t}$, donde $t$ es el tiempo en segundos y las dimensiones están en centímetros. Encontrar el ritmo de cambio del área respecto al tiempo.

**84.** ***Volumen*** El radio de un cilindro recto circular está dado por $\sqrt{t + 2}$ y su altura por $\frac{1}{2}\sqrt{t}$, donde $t$ es el tiempo en segundos y las dimensiones se encuentran en pulgadas. Encontrar el ritmo de cambio del volumen respecto al tiempo.

**85.** ***Reposición de inventario*** El costo $C$ de pedido y transporte de los elementos utilizados para la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde $C$ se mide en miles de dólares y $x$ es el tamaño del pedido, en cientos. Encontrar la razón de cambio de $C$ respecto a $x$ cuando *a*) $x = 10$, *b*) $x = 15$ y *c*) $x = 20$. ¿Qué implican estas razones de cambio cuando el tamaño del pedido aumenta?

**86.** ***Ley de Boyle*** Esta ley establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

**87.** ***Crecimiento demográfico*** Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

donde $t$ se mide en horas. Calcular el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

**88.** ***Fuerza gravitacional*** La ley de la gravitación universal de Newton establece que la fuerza $F$ que existe entre dos masas, $m_1$ y $m_2$, es

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

donde $G$ es una constante y $d$ es la distancia entre ambas masas. Encontrar una ecuación que calcule el ritmo de cambio instantáneo de $F$ respecto a $d$ (suponer que $m_1$ y $m_2$ representan puntos móviles).

**89.** Demostrar las siguientes reglas de derivación.

*a)* $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$ *b)* $\dfrac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

*c)* $\dfrac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

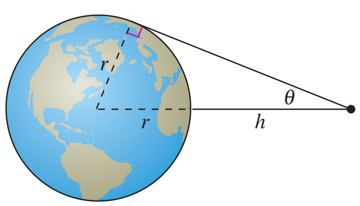
**90.** ***Ritmo o velocidad de cambio*** Determinar si existe algún valor de $x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que los ritmos de cambio de $f(x) = \sec x$ y de $g(x) = \csc x$ sean iguales.

**91.** ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra las cantidades $q$ (en millones) de computadoras personales embarcadas en Estados Unidos y los valores $v$ (en miles de millones de dólares) de estos embarques durante los años 1999 a 2004. La $t$ representa el año, y $t = 9$ corresponde a 1999. (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

| Año, $t$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 19.6 | 15.9 | 14.6 | 12.9 | 15.0 | 15.8 |
| $v$ | 26.8 | 22.6 | 18.9 | 16.2 | 14.7 | 15.3 |

*a)* Utilizar una herramienta de graficación para encontrar los modelos cúbicos para el número de computadoras personales embarcadas $q(t)$ y su valor $v(t)$ correspondiente.
*b)* Representar gráficamente cada uno de los modelos desarrollados al responder el apartado *a*).
*c)* Encontrar $A = v(t)/q(t)$, para obtener la gráfica $A$. ¿Qué representa esta función?
*d)* Interpretar $A'(t)$ en el contexto de estos datos.

**92.** ***Satélites*** Cuando los satélites exploran la Tierra, sólo tienen alcance para una parte de su superficie. Algunos de ellos cuentan con sensores que pueden medir el ángulo $\theta$ que se muestra en la figura. Si $h$ representa la distancia que hay entre el satélite y la superficie de la Tierra y $r$ el radio de esta última:




*a)* Demostrar que $h = r(\csc \theta - 1)$.
*b)* Encontrar el ritmo al que cambia $h$ respecto a $\theta$ cuando $\theta = 30°$. (Suponer que $r = 3\,960$ millas.)

**En los ejercicios 93 a 100, encontrar la segunda derivada de la función.**

**93.** $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ **94.** $f(x) = 8x^6 - 10x^5 + 5x^3$

**95.** $f(x) = 4x^{3/2}$ **96.** $f(x) = x + 32x^{-2}$

**97.** $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **98.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

**99.** $f(x) = x \operatorname{sen} x$ **100.** $f(x) = \sec x$

**En los ejercicios 101 a 104, encontrar la derivada de orden superior que se indica.**

**101.** $f'(x) = x^2, \quad f''(x)$ **102.** $f''(x) = 2 - \dfrac{2}{x}, \quad f'''(x)$

**103.** $f'''(x) = 2\sqrt{x}, \quad f^{(4)}(x)$ **104.** $f^{(4)}(x) = 2x + 1, \quad f^{(6)}(x)$

**En los ejercicios 105 a 108, utilizar la información dada para encontrar $f'(2)$.**

$g(2) = 3$ **y** $g'(2) = -2$

$h(2) = -1$ **y** $h'(2) = 4$

**105.** $f(x) = 2g(x) + h(x)$ **106.** $f(x) = 4 - h(x)$

**107.** $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ **108.** $f(x) = g(x)h(x)$

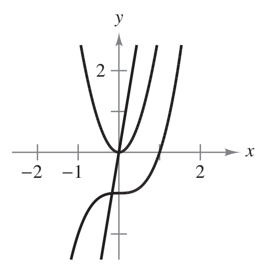
## Desarrollo de conceptos

**109.** Construir la gráfica de una función derivable $f$ tal que $f(2) = 0$, $f' < 0$ para $-\infty < x < 2$ y $f' > 0$ para $2 < x < \infty$. Explicar el razonamiento.

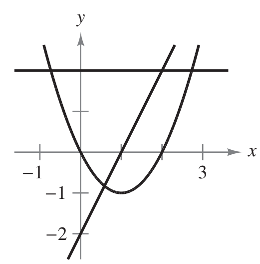
**110.** Construir la gráfica de una función derivable $f$ tal que $f > 0$ y $f' < 0$ para todos los números reales $x$. Explicar el razonamiento.

**En los ejercicios 111 y 112 se muestran las gráficas de $f$, $f'$ y $f''$ sobre el mismo plano cartesiano. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.**

**111.**

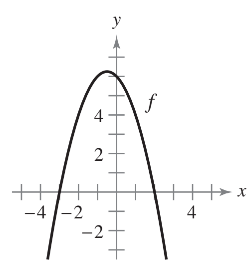



**112.**




**En los ejercicios 113 a 116 se muestra la gráfica de $f$. Construir las gráficas de $f'$ y $f''$.**

**113.**




**114.**