6 Funciones trigonométricas

Las mareas en la costa y unos baldes con agua

En Florida anuncian con mucha precisión las horas en que las mareas van y vienen, como 11:23 AM. ¿Cómo pueden tener tanta precisión?

Existen más características de las mareas, el agua del mar que sube y baja, que la atracción gravitacional de la Luna y el Sol.

Por supuesto, estos son factores primordiales. Como el movimiento relacionado de la Tierra, el Sol y la Luna se conoce con precisión, es fácil predecir el ritmo de las mareas altas y bajas en las costas.

Pero la hora y la altura de las mareas podrían variar para diferentes puntos de la misma costa, aunque estén reaccionando a fuerzas y presiones similares.

La observación histórica hace posible encontrar la hora exacta de las mareas altas y bajas en una sección específica de la costa durante un mes, un año o más hacia el futuro.

La razón de la diferencia es la oscilación. Piense en varios baldes con diferentes niveles de agua colocados sobre una mesa, dice Charles O'Reilly, jefe de Análisis de Mareas en el *Geological Survey* de Canadá, en Dartmouth, Nueva Escocia. Después mueva la mesa.

"Observará que el agua en los baldes se mueve en forma diferente. Ésa es su oscilación natural", dice O'Reilly. "Si da golpecitos a la mesa con ritmo, verá que el agua de cada balde continúa moviéndose en forma diferente, porque cada uno tiene su propio ritmo."

"Ahora, si une esos baldes, es un poco como el océano en la costa. Sienten el mismo 'golpe', pero todos responden a su manera. Para predecir una marea, debe medirla durante algún tiempo."

FUENTE: *Toronto Star*, 13 de junio de 2001, p. GT02. Reimpreso con autorización de Torstar Sindication Services.

—VEA EL PROYECTO 1 DEL CAPÍTULO.

CONTENIDO

6.1 Ángulos y su medida

PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Circunferencia y área de un círculo (Repaso, sección R.3, p. 31)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 502.

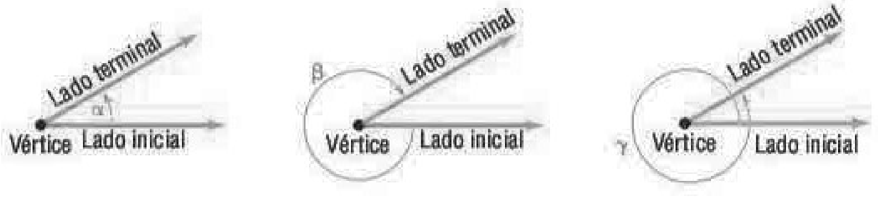
OBJETIVOS
1. Hacer conversiones entre grados, minutos, segundos y formas decimales para los ángulos
2. Encontrar la longitud de arco de un círculo
3. Convertir grados en radianes
4. Convertir radianes en grados
5. Encontrar el área de un sector de un círculo
6. Encontrar la velocidad lineal de un objeto que viaja en movimiento circular

Figura 1

Un **rayo**, o **semirrecta**, es esa porción de una recta que comienza en el punto V sobre la recta y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo se llama su **vértice**. Vea la figura 1.

Si se dibujan dos rayos con un vértice común, forman un **ángulo**. Uno de los rayos de un ángulo recibe el nombre de **lado inicial** y el otro, **lado terminal**. El ángulo formado se identifica mostrando la dirección y la cantidad de rotación del lado inicial al lado terminal. Si la rotación es en dirección contraria a las manecillas del reloj, el ángulo es positivo; si la rotación es en dirección de las manecillas de reloj, el ángulo es **negativo**. Vea la figura 2. Se usarán letras griegas minúsculas como α (alfa), β (beta), γ (gama) y θ (theta) para denotar ángulos. Observe en la figura 2*a*) que α es positivo porque la dirección de rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj. El ángulo β en la figura 2*b*) es negativo porque la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo γ en la figura 2*c*) es positivo. Note que el ángulo α en la figura 2*a*) y el ángulo γ en la figura 2*c*) tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal. Sin embargo, α y γ no son iguales porque la cantidad de rotación requerida para ir del lado inicial al lado terminal es mayor para el ángulo γ que para el ángulo α.

Figura 2



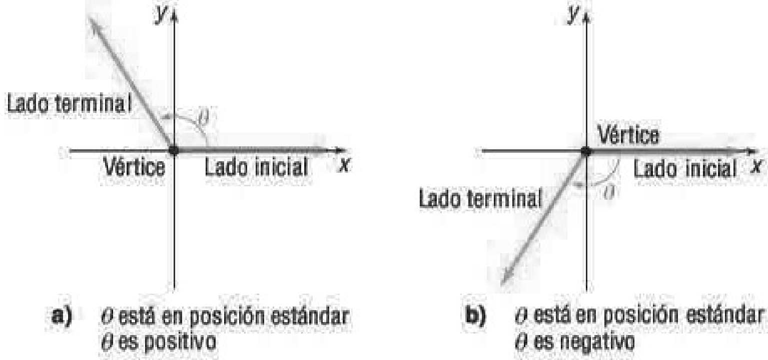
Rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj
Ángulo positivo
a)

Rotación en sentido de las manecillas del reloj
Ángulo negativo
b)

Rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj
Ángulo positivo
c)

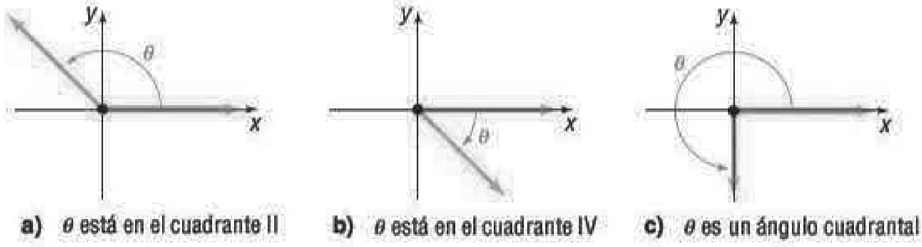
Se dice que un ángulo θ está en **posición estándar** si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje x. Vea la figura 3.

Figura 3



Cuando un ángulo θ está en posición estándar, el lado terminal estará ya sea en un cuadrante, en cuyo caso se dice que θ **está en ese cuadrante**, o bien θ sobre el eje x o el eje y; entonces, se dice que θ es un **ángulo cuadrantal**. Por ejemplo, el ángulo θ de la figura 4*a*) está en el cuadrante II, el ángulo θ de la figura 4*b*) está en el cuadrante IV y el ángulo θ de la figura 4*c*) es un ángulo cuadrantal.

Figura 4



Los ángulos se miden determinando la cantidad de rotación necesaria para que el lado inicial coincida con el lado terminal. Las dos medidas de uso común son *grados* y *radianes*.

Grados

El ángulo formado al girar el lado inicial exactamente una vez en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta que coincide consigo mismo (1 vuelta), se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. **Un grado, 1°,** es $\frac{1}{360}$ de vuelta. Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90°, o $\frac{1}{4}$ de vuelta; un **ángulo plano** mide 180°, o $\frac{1}{2}$ vuelta. Vea la figura 5. Como se muestra en la figura 5*b*), es costumbre indicar un ángulo recto mediante el símbolo ∟.

Figura 5

También es costumbre referirse a un ángulo que mide θ grados como un ángulo de θ grados.

EJEMPLO 1 Dibujo de un ángulo

Dibuje cada ángulo

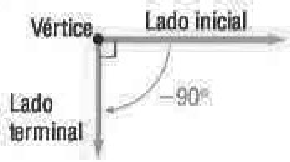
a) 45° b) −90° c) 225° d) 405°

Solución a) Un ángulo de 45° es $\frac{1}{2}$ ángulo recto. Vea la figura 6.

b) Un ángulo de −90° es $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido negativo (como las manecillas). Vea la figura 7.

Figura 6

Figura 7



c) Un ángulo de 225° consiste en una rotación de 180° seguida de una rotación de 45°. Vea la figura 8.

d) Un ángulo de 405° consiste en 1 vuelta (360°) seguida de una rotación de 45°. Vea la figura 9.

Figura 8

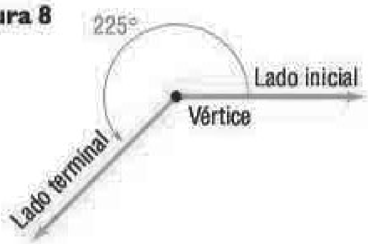
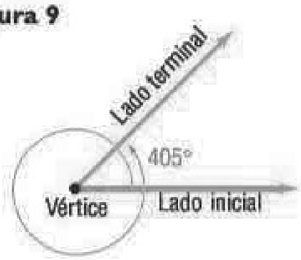


Figura 9



TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

1 Aunque se podrían obtener subdivisiones de un grado usando decimales, también se utiliza la notación de *minutos* y *segundos*. **Un minuto**, denotado por **1′**, se define como $\frac{1}{60}$ de grado. **Un segundo**, denotado por **1″**, se define como $\frac{1}{60}$ de minuto, o de manera equivalente, $\frac{1}{3600}$ de grado. Un ángulo, digamos de 30 grados, 40 minutos, 10 segundos se escribe de manera compacta como 30°40′10″. Para resumir:

$$1 \text{ vuelta en sentido positivo} = 360^\circ$$
$$1^\circ = 60' \qquad 1' = 60'' \tag{1}$$

Algunas veces es necesario convertir de la notación de grados, minutos y segundos (G°M′S″) en una forma decimal y viceversa. Verifique su calculadora, seguro que puede hacer la conversión.

Sin embargo, antes de comenzar debe establecer el modo de grados, porque existen dos maneras comunes de medir ángulos: modo de grados y modo de radianes. (Pronto se definirán los radianes). Suele haber un menú que se usa para cambiar de un modo a otro. Vea el manual del usuario para su calculadora.

Ahora se verá con algunos ejemplos cómo convertir a mano grados, minutos y segundos (G°M'S") en una forma decimal y viceversa.

$$15°30' = 15.5° \quad \text{porque} \quad 30' \underset{\uparrow \; 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}}{=} 30 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = 0.5°$$

$$32.25° = 32°15' \quad \text{porque} \quad 0.25° = \left(\frac{1}{4}\right)^{\circ} \underset{\uparrow \; 1° = 60'}{=} \frac{1}{4}(60') = 15'.$$

EJEMPLO 2 **Conversión manual entre grados, minutos y segundos, y las formas decimales**

a) Convierta 50°6'21" en un decimal en grados.

b) Convierta 21.256° en la forma G°M'S".

Solución a) Dado que $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ}$, se convierte como sigue:

$$\begin{aligned} 50°6'21'' &= 50° + 6' + 21'' \\ &= 50° + 6 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 21 \cdot \left(\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ} \\ &\approx 50° + 0.1° + 0.005833° \\ &= 50.105833° \end{aligned}$$

b) Se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 21.256° &= 21° + 0.256° \\ &= 21° + (0.256)(60') && \text{Convertir fracciones de grados en minutos, } 1° = 60' \\ &= 21° + 15.36' \\ &= 21° + 15' + 0.36' \\ &= 21° + 15' + (0.36)(60'') && \text{Convertir fracciones de minutos en segundos, } 1' = 60'' \\ &= 21° + 15' + 21.6'' \\ &\approx 21°15'22'' \end{aligned}$$

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 23 Y 29.

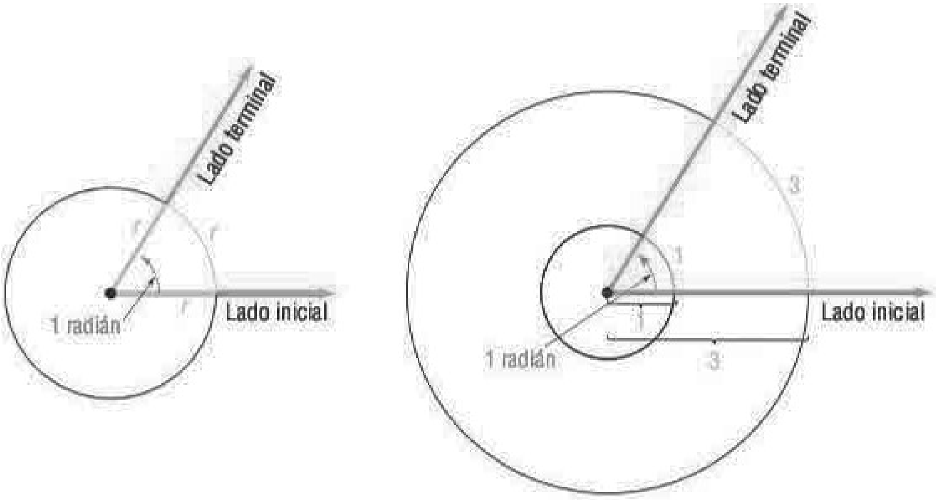
En muchas aplicaciones, como las que describen la localización exacta de una estrella o la posición precisa de un barco en el mar, los ángulos se miden en grados, minutos e incluso segundos. Para hacer cálculos, se transforma en la forma decimal. En otras aplicaciones, en especial en cálculo, los ángulos se miden en *radianes*.

Radianes

Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo. Los rayos de un ángulo central subtienden (abarcan) un arco sobre el círculo. Si el radio del círculo es r y la longitud del arco subtendido por el ángulo central también es r, entonces la medida del ángulo es **1 radián**. Vea la figura 10*a*).

Para un círculo de radio 1, los rayos del ángulo central que mide 1 radián subtienden un arco de longitud 1. Para un círculo de 3, los rayos de un ángulo central que mide 1 radián subtienden un arco de longitud 3. Vea la figura 10*b*).

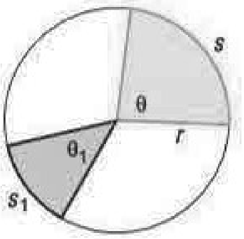
Figura 10



a) b)

2 Ahora considere un círculo de radio r y dos ángulos centrales, θ y θ_1, medidos en radianes. Suponga que estos ángulos centrales subtienden arcos de longitudes s y s_1, respectivamente, como se muestra en la figura 11. De la geometría, se sabe que la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por estos ángulos; esto es,

Figura 11
$\dfrac{\theta}{\theta_1} = \dfrac{s}{s_1}$



$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1} \tag{2}$$

Suponga que $\theta_1 = 1$ radián. Vea de nuevo la figura 10*a*). El tamaño del arco s_1 subtendido por el ángulo central $\theta_1 = 1$ radián es igual al radio r del círculo. Entonces, $s_1 = r$, de manera que la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r} \quad \text{o} \quad s = r\theta \tag{3}$$

Teorema

Longitud de arco

Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$\boxed{s = r\theta} \tag{4}$$

Nota: Las fórmulas deben ser congruentes respecto de las unidades usadas. En la ecuación (4) se escribe

$$s = r\theta$$

Sin embargo, para ver las unidades, se debe regresar a la ecuación (3) y escribir

$$\frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}} = \frac{s \text{ unidades de longitud}}{r \text{ unidades de longitud}}$$

$$s \text{ unidades de longitud} = r \text{ unidades de longitud} \frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}}$$

Como los radianes se cancelan, queda

$$s \text{ unidades de longitud} = (r \text{ unidades de longitud})\theta \qquad s = r\theta$$

donde θ aparece "sin dimensión", pero se mide en radianes. Así, al usar la fórmula $s = r\theta$, la dimensión de θ es radianes y se utiliza cualquier unidad de longitud conveniente (como pulgadas o metros) para s y r. ■

EJEMPLO 3 **Longitud del arco de un círculo**

Encuentre la longitud del arco de un círculo de radio 2 metros que subtiende un ángulo central de 0.25 radianes.

Solución Se usa la ecuación (4) con $r = 2$ metros y $\theta = 0.25$. La longitud s del arco es

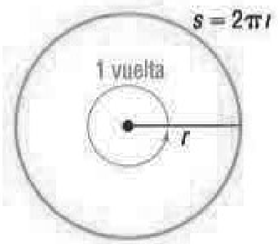
$$s = r\theta = 2(0.25) = 0.5 \text{ metros}$$

◄

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 71.

Relación entre grados y radianes

Figura 12
1 vuelta = 2π radianes



Considere un círculo de radio r. Un ángulo central de 1 vuelta subtiende un arco igual a la circunferencia del círculo (figura 12). Como la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi r$, se usa $s = 2\pi r$ en la ecuación (4) para encontrar que, para un ángulo θ de 1 vuelta,

$$s = r\theta$$

$$2\pi r = r\theta \qquad \theta = 1 \text{ vuelta; } s = 2\pi r.$$

$$\theta = 2\pi \text{ radianes} \qquad \text{Despejar } \theta.$$

De esto se tiene,

$$\boxed{1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ radianes} \qquad (5)}$$

de manera que

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

o

$$\boxed{180° = \pi \text{ radianes} \qquad (6)}$$

Se dividen ambos lados de la ecuación (6) entre 180. Entonces

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

Se dividen ambos lados de la ecuación (6) entre π. Entonces

$$\frac{180}{\pi}\text{grados} = 1\text{ radián}$$

Se tiene las dos siguientes fórmulas de conversión:

$$1\text{ grado} = \frac{\pi}{180}\text{radianes} \qquad 1\text{ radián} = \frac{180}{\pi}\text{grados} \qquad (7)$$

3 **EJEMPLO 4** **Conversión de grados a radianes**

Convierta cada ángulo de grados a radianes.

a) $60°$ b) $150°$ c) $-45°$ d) $90°$ e) $107°$

Solución a) $60° = 60 \cdot 1\text{ grado} = 60 \cdot \frac{\pi}{180}\text{radián} = \frac{\pi}{3}\text{radianes}$

b) $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180}\text{radián} = \frac{5\pi}{6}\text{radianes}$

c) $-45° = -45 \cdot \frac{\pi}{180}\text{radián} = -\frac{\pi}{4}\text{radián}$

d) $90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180}\text{radián} = \frac{\pi}{2}\text{radianes}$

e) $107° = 107 \cdot \frac{\pi}{180}\text{radián} \approx 1.868\text{ radianes}$ ◄

El ejemplo 4 ilustra que los ángulos que son fracciones de una vuelta, *a*) a *d*), se expresan en radianes como múltiplos fraccionales de π, en lugar de como decimales. Por ejemplo, un ángulo recto, como en el ejemplo 4*d*), se deja en la forma $\frac{\pi}{2}$ radianes, que es una cantidad exacta, en lugar de usar la aproximación $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3.1416}{2} = 1.5708$ radians.

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 35 Y 61.

4 **EJEMPLO 5** **Conversión de radianes a grados**

Convierta cada ángulo de radianes a grados.

a) $\frac{\pi}{6}$radián b) $\frac{3\pi}{2}$radianes c) $-\frac{3\pi}{4}$radianes

d) $\frac{7\pi}{3}$radianes e) 3 radianes

Solución a) $\frac{\pi}{6}\text{radián} = \frac{\pi}{6} \cdot 1\text{ radián} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\text{grados} = 30°$

b) $\frac{3\pi}{2}\text{radianes} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}\text{grados} = 270°$

c) $-\frac{3\pi}{4}\text{radianes} = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\text{grados} = -135°$

d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $= \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 420°$

e) 3 radianes $= 3 \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $\approx 171.89°$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 47.

La tabla 1 enumera las medidas en grados y radianes de algunos ángulos que se encuentran con frecuencia. Usted debe aprender a trabajar a gusto tanto con grados como con radianes para estos ángulos.

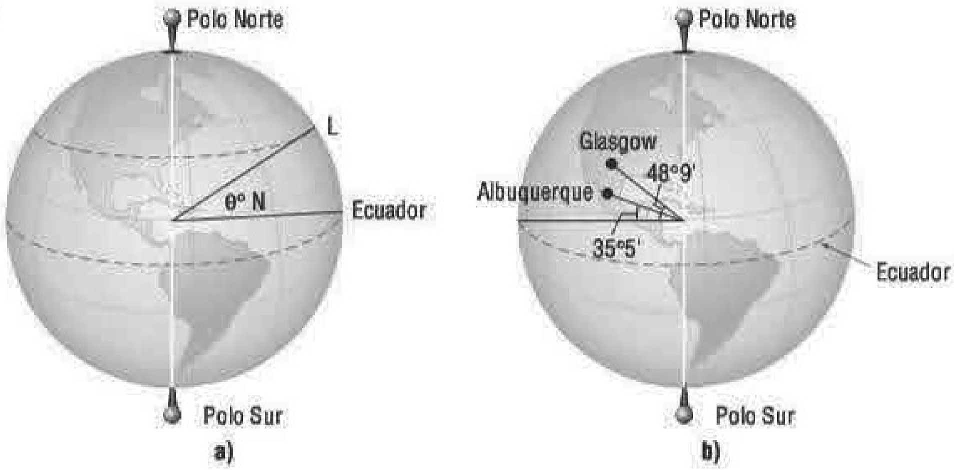
Tabla 1

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Grados		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

EJEMPLO 6 Distancia entre dos ciudades

Vea la figura 13*a*). La latitud de un lugar L es el ángulo formado por un rayo dibujado desde el centro de la Tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la Tierra a L. Vea la figura 13*b*). Glasgow, Montana, está justo al norte de Albuquerque, Nuevo México. Encuentre la distancia entre Glasgow (48°9′ latitud norte) y Albuquerque (35°5′ latitud norte). Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

Figura 13



Solución La medida del ángulo central entre las dos ciudades es de $48°9' - 35°5' = 13°4'$. Se usa la ecuación 4, $s = r\theta$, pero primero debe convertirse el ángulo de 13°4′ a radianes.

$$\theta = 13°4' \approx 13.0667° = 13.0667 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} \approx 0.228 \text{ radián}$$

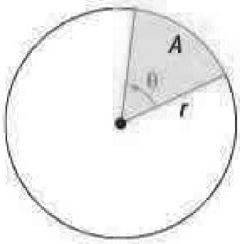
Se usa $\theta = 0.228$ radianes y $r = 3960$ millas en la ecuación (4). La distancia entre las dos ciudades es de

$$s = r\theta = 3960 \cdot 0.228 \approx 903 \text{ millas}$$

Cuando un ángulo se mide en grados, siempre se muestra el símbolo de grados. Sin embargo, cuando un ángulo se mide en radianes se sigue la práctica usual de omitir la palabra *radianes*. Entonces, si la medida de un ángulo está dada como $\frac{\pi}{6}$, se entiende que son $\frac{\pi}{6}$ radianes.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **101**.

Figura 14

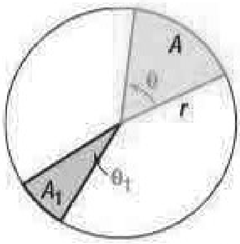


Área de un sector

5 Considere un círculo de radio r. Suponga que θ, medido en radianes, es un ángulo central de este círculo. Vea la figura 14. Se busca una fórmula para el área A del sector formado por el ángulo θ (área sombreada).

Ahora, considere el círculo de radio r y dos ángulos centrales θ y θ_1, ambos medidos en radianes. Vea la figura 15. De geometría se sabe que la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las áreas correspondientes de los sectores formados por estos ángulos. Esto es,

Figura 15



$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{A}{A_1}$$

Suponga que $\theta_1 = 2\pi$ radianes. Entonces $A_1 =$ área del círculo $= \pi r^2$. Al despejar A se encuentra

$$A = A_1 \frac{\theta}{\theta_1} = \pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Teorema

Área de un sector

El área del sector de un círculo de radio r formada por un ángulo central del θ radianes es

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \qquad \textbf{(8)}$$

EJEMPLO 7 **Área de un sector de un círculo**

Encuentre el área del sector de un círculo de radio 2 pies formado por un ángulo de 30°. Redondee la respuesta a dos decimales.

Solución Se usa la ecuación (8) con $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ radianes. [Recuerde, en la ecuación (8), θ debe estar en radianes]. El área A del sector es de

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(2)^2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ pies cuadrados} \approx 1.05 \text{ pies cuadrados}$$

redondeado a dos decimales.

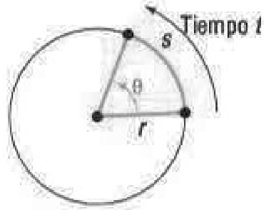
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **79**.

Movimiento circular

Se definió previamente la velocidad promedio de un objeto como la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. Suponga que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio r a una velocidad constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor del círculo, entonces la **velocidad lineal** v del objeto se define como

Figura 16

$v = \frac{s}{t} \quad \omega = \frac{\theta}{t}$



$$\boxed{v = \frac{s}{t}} \qquad \textbf{(9)}$$

Mientras este objeto viaja alrededor del círculo, suponga que θ (medido en radianes) es el ángulo central barrido en el tiempo t. Vea la figura 16. Entonces, la **velocidad angular** ω (la letra griega omega) de este objeto es el ángulo (medido en radianes) que se barre dividido entre el tiempo transcurrido, es decir,

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}} \qquad \textbf{(10)}$$

La velocidad angular es la manera de describir la razón de rotación de un motor. Por ejemplo, un motor en marcha a 900 rpm (revoluciones por minuto) gira a una velocidad angular de

$$900\,\frac{\text{revoluciones}}{\text{minutos}} = 900\,\frac{\cancel{\text{revoluciones}}}{\text{minutos}}\cdot 2\pi\,\frac{\text{radianes}}{\cancel{\text{revoluciones}}} = 1800\pi\,\frac{\text{radianes}}{\text{minutos}}$$

Existe una relación importante entre la velocidad lineal y la velocidad angular:

$$\text{velocidad lineal} = v = \underset{\substack{\uparrow \\ (9)}}{\frac{s}{t}} = \underset{\substack{\uparrow \\ s = r\theta}}{\frac{r\theta}{t}} = r\left(\frac{\theta}{t}\right)$$

Entonces, si se usa la ecuación (10) se obtiene

$$\boxed{v = r\omega} \qquad \textbf{(11)}$$

donde ω se mide en radianes por unidad de tiempo.

Al usar la ecuación (11), recuerde que $v = \frac{s}{t}$ (la velocidad lineal) tiene dimensiones de longitud por unidad de tiempo (como pies por segundo o millas por hora), r (el radio del movimiento circular) tiene la misma dimensión de longitud que s y ω (la velocidad angular) tiene las dimensiones de radianes por unidad de tiempo. Si la velocidad angular está dada en términos de *revoluciones* por unidad de tiempo (como con frecuencia es el caso), asegúrese de convertirla a *radianes* por unidad de tiempo antes de intentar usar la ecuación (11).

EJEMPLO 8 **Velocidad lineal**

Un niño hace girar una piedra atada a una cuerda de 2 pies de largo a una tasa de 180 revoluciones por minuto (rpm). Encuentre la velocidad lineal de la piedra cuando se suelta.

Figura 17

Solución Vea la figura 17. La piedra se mueve alrededor de un círculo de radio $r = 2$ pies. La velocidad angular ω de la piedra es

$$\omega = 180\frac{\text{revoluciones}}{\text{minutos}} = 180\frac{\cancel{\text{revoluciones}}}{\text{minutos}}\cdot 2\pi\frac{\text{radianes}}{\cancel{\text{revoluciones}}} = 360\pi\frac{\text{radianes}}{\text{minutos}}$$

De la ecuación (11), la velocidad lineal v de la piedra es

$$v = r\omega = 2\text{ pies}\cdot 360\pi\frac{\text{radianes}}{\text{minutos}} = 720\pi\frac{\text{pies}}{\text{minutos}} \approx 2262\frac{\text{pies}}{\text{minutos}}$$

La velocidad lineal de la piedra cuando se suelta es de 2262 pies/min ≈ 25.7 millas/h.

ASPECTO HISTÓRICO

La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos, quienes veían el cielo como el interior de una esfera, de manera que fue natural que los triángulos en una esfera se investigaran muy pronto (Menelaus de Alejandría en el año 100 dC) y que los triángulos en el plano se investigarán después. El astrónomo persa Nasîr Eddin escribió el primer libro que contiene un tratado sistemático de trigonometría plana y esférica (alrededor de 1250 dC).

Regiomontanus (1436-1476) es la persona más responsable de que la trigonometría se moviera de la astronomía a las matemáticas. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y su alumno Rhaeticus (1514-1576). El libro de Rhaeticus fue el primero en definir las seis funciones trigonométricas como razones de los lados de los triángulos, aunque no dio a las funciones sus nombres actuales. Éstos se deben a Thomas Finck (1583), aunque la notación de Finck no se aceptó de manera universal en el momento. Con el tiempo, la notación se estabilizó gracias a los libros de texto de Leonhard Euler (1707-1783).

La trigonometría ha evolucionado desde sus aplicaciones en geodesia, navegación e ingeniería a los estudios actuales de las mareas, el aumento y la disminución de los recursos alimenticios en ciertas ecologías, los patrones de ondas en el cerebro y muchos otros fenómenos.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 97.

6.1 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. ¿Cuál es la fórmula para la circunferencia C de un círculo de radio r? (p. 31)

2. ¿Cuál es la fórmula para el área A de un círculo de radio r? (p. 31)

Conceptos y vocabulario

3. Un ángulo θ está en ________ ________ si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje x.

4. En un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco de longitud $s =$ ________; el área del sector formado por este ángulo θ es $A =$ ________.

5. Un objeto viaja alrededor de un círculo de radio r con velocidad constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor del círculo y θ es el ángulo central (en radianes) barrido en el tiempo t, entonces la velocidad lineal del objeto es $v =$ ________ y la velocidad angular es $\omega =$ ________.

6. *Falso o verdadero:* $\pi = 180$.

7. *Falso o verdadero:* $180° = \pi$ radianes.

8. *Falso o verdadero:* en un círculo unitario, si s es la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ, medido en radianes, entonces $s = \theta$.

9. *Falso o verdadero:* el área A de un sector de un círculo f de radio r formado por un ángulo central de θ grados es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

10. *Falso o verdadero:* para el movimiento circular sobre un círculo de radio r, la velocidad lineal es igual a la velocidad angular entre r.

Ejercicios

En los problemas 11-22, dibuje cada ángulo.

11. $30°$ **12.** $60°$ **13.** $135°$ **14.** $-120°$ **15.** $450°$ **16.** $540°$

17. $\frac{3\pi}{4}$ **18.** $\frac{4\pi}{3}$ **19.** $-\frac{\pi}{6}$ **20.** $-\frac{2\pi}{3}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$ **22.** $\frac{21\pi}{4}$

En los problemas 23-28, convierta cada ángulo a un decimal en grados. Redondee su respuesta a dos decimales.

23. $40°10'25''$ **24.** $61°42'21''$ **25.** $1°2'3''$ **26.** $73°40'40''$ **27.** $9°9'9''$ **28.** $98°22'45''$

En los problemas 29-34, dé cada ángulo en la forma G°M'S". Redondee su respuesta al segundo más cercano.

29. $40.32°$ **30.** $61.24°$ **31.** $18.255°$ **32.** $29.411°$ **33.** $19.99°$ **34.** $44.01°$

En los problemas 35-46, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

35. $30°$ **36.** $120°$ **37.** $240°$ **38.** $330°$ **39.** $-60°$ **40.** $-30°$

41. $180°$ **42.** $270°$ **43.** $-135°$ **44.** $-225°$ **45.** $-90°$ **46.** $-180°$

En los problemas 47-58, convierta cada ángulo de radianes a grados.

47. $\frac{\pi}{3}$ **48.** $\frac{5\pi}{6}$ **49.** $-\frac{5\pi}{4}$ **50.** $-\frac{2\pi}{3}$ **51.** $\frac{\pi}{2}$ **52.** 4π

53. $\frac{\pi}{12}$ **54.** $\frac{5\pi}{12}$ **55.** $-\frac{\pi}{2}$ **56.** $-\pi$ **57.** $-\frac{\pi}{6}$ **58.** $-\frac{3\pi}{4}$

En los problemas 59-64, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta en la forma decimal, redondeada a dos decimales.

59. $17°$ **60.** $73°$ **61.** $-40°$ **62.** $-51°$ **63.** $125°$ **64.** $350°$

En los problemas 65-70, convierta cada ángulo de radianes a grados. Exprese su respuesta en la forma decimal redondeada a dos decimales.

65. 3.14 **66.** 0.75 **67.** 2 **68.** 3 **69.** 6.32 **70.** $\sqrt{2}$

En los problemas 71-78, s denota la longitud del arco de un círculo de radio r subtendido por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que falta. Redondee sus respuestas a tres decimales.

71. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $s = ?$

72. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $s = ?$

73. $\theta = \frac{1}{3}$ radianes, $s = 2$ pies, $r = ?$

74. $\theta = \frac{1}{4}$ radianes, $s = 6$ centímetros, $r = ?$

75. $r = 5$ millas, $s = 3$ millas, $\theta = ?$

76. $r = 6$ metros, $s = 8$ metros, $\theta = ?$

77. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $s = ?$

78. 3 metros, $\theta = 120°$, $s = ?$

En los problemas 79-86, A denota el área del sector de un círculo de radio r formado por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que falta. Redondee sus respuestas a tres decimales.

79. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $A = ?$

80. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $A = ?$

81. $\theta = \frac{1}{3}$ radianes, $A = 2$ pies cuadrados, $r = ?$

82. $\theta = \frac{1}{4}$ radianes, $A = 6$ centímetros cuadrados, $r = ?$

83. $r = 5$ millas, $A = 3$ millas cuadradas, $\theta = ?$

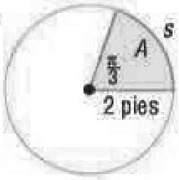
84. $r = 6$ metros, $A = 8$ metros cuadrados, $\theta = ?$

85. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $A = ?$

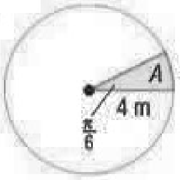
86. $r = 3$ metros, $\theta = 120°$, $A = ?$

En los problemas 87-90, encuentre la longitud s y el área A. Redondee las respuestas a tres decimales.

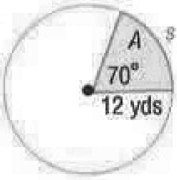
87.



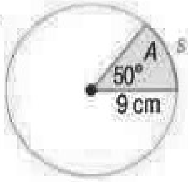
88.



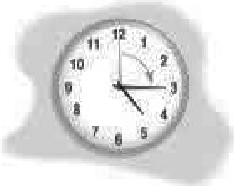
89.



90.



91. Minutero de un reloj El minutero de un reloj tiene 6 pulgadas de largo. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero en 15 minutos? ¿Cuánto se mueve en 25 minutos?

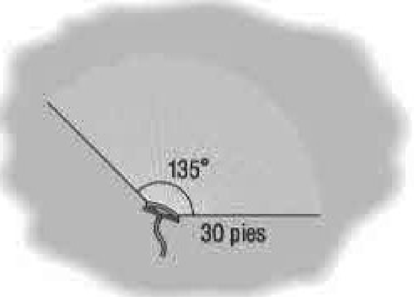


92. Movimiento de un péndulo Un péndulo se mueve un ángulo de 20° cada segundo. Si tiene 40 pulgadas de largo, ¿cuánto se mueve su punta cada segundo?

93. Área de un sector Encuentre el área de un círculo con radio de 4 metros formado por un ángulo de 45°. Redondee la respuesta a dos decimales.

94. Área de un sector Encuentre el área de un sector de un círculo con radio de 3 centímetros formado por un ángulo de 60°. Redondee la respuesta a dos decimales.

95. Riego del pasto Un aspersor riega agua a una distancia de 30 pies al girar un ángulo de 135°. ¿Qué área del pasto recibe agua?



96. Diseño de un aspersor Se pide a un ingeniero que diseñe un aspersor que cubra un campo de 100 yardas cuadradas con la forma de un sector circular con radio de 50 yardas. ¿Qué ángulo debe recorrer el aspersor al girar?

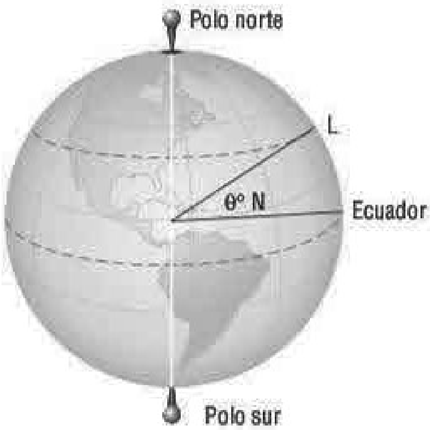
97. Movimiento en círculo Un objeto viaja alrededor de un círculo con radio de 5 centímetros. Si en 20 segundos recorre un ángulo central de $\frac{1}{3}$ radianes, ¿cuál es la velocidad angular del objeto? ¿Cuál es la velocidad lineal?

98. Movimiento en círculo Un objeto viaja alrededor de un círculo con un radio de 2 metros. Si en 20 segundos el objeto recorre 5 metros, ¿cuál es su velocidad angular? ¿Cuál es su velocidad lineal?

99. Llantas de bicicleta El diámetro de cada llanta de una bicicleta es de 26 pulgadas. Si el ciclista va a una velocidad de 35 millas por hora, ¿a cuántas revoluciones por minuto giran las llantas?

100. Llantas de un auto El radio de las llantas de un auto es de 15 pulgadas. Si giran a razón de 3 revoluciones por segundo, ¿a qué velocidad se mueve el auto? Exprese su respuesta en pulgadas por segundo y en millas por hora.

En los problemas 101-104, la latitud de un lugar L es el ángulo formado por un rayo dibujado del centro de la Tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la Tierra a L. Vea la figura.



101. Distancia entre dos ciudades Memphis, Tennessee, está al norte de Nueva Orleans, Louisiana. Encuentre la distancia entre Memphis (35°9′ latitud norte) y Nueva Orleans (29°57′ latitud norte). Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

102. Distancia entre dos ciudades Charleston, West Virginia, está al norte de Jacksonville, Florida. Encuentre la distancia entre Charleston (38°21′ latitud norte) y Jacksonville (30°20′ latitud norte). Suponga que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

103. Velocidad lineal en la Tierra La Tierra gira sobre un eje que pasa por los polos. La distancia del eje a un lugar 30° latitud norte es de alrededor de 3429.5 millas. Por lo tanto, un lugar en la Tierra 30° latitud norte da vueltas sobre un círculo con radio de 3429.5 millas. Calcule la velocidad lineal en la superficie de la Tierra a 30° latitud norte.

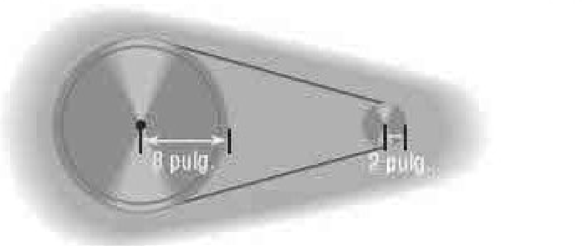
104. Velocidad lineal en la Tierra La Tierra gira sobre un eje que pasa por los polos. La distancia del eje a un lugar 40° latitud norte es de alrededor de 3033.5 millas. Por lo tanto, un lugar en la Tierra a 40° latitud norte da vueltas sobre un círculo con radio de 3033.5 millas. Calcule la velocidad lineal en la superficie de la Tierra a 40° latitud norte.

105. Velocidad de la Luna La distancia media de la Luna a la Tierra es de 2.39×10^5 millas. Suponga que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular y que 1 vuelta toma 27.3 días, encuentre la velocidad lineal de la Luna. Exprese su respuesta en millas por hora.

106. Velocidad de la Tierra La distancia promedio a la Tierra desde el Sol es de 9.29×10^7 millas. Suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular y que una vuelta toma 365 días, determine la velocidad lineal de la Tierra. Exprese su respuesta en millas por hora.

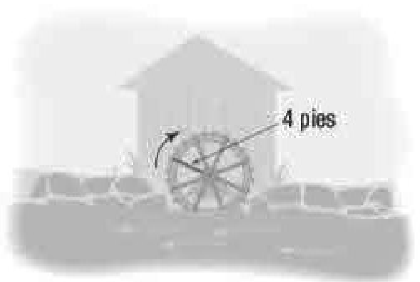
107. Poleas Dos poleas, una con radio de 2 pulgadas y la otra con radio de 8 pulgadas, están conectadas por una correa. (Vea la figura). Si se hace girar la polea de 2 pulgadas a 3 revoluciones por minuto, determine las revoluciones por minuto de la polea de 8 pulgadas.

[**Sugerencia:** Las velocidades lineales de las poleas son iguales, ambas son iguales a la velocidad de la correa].



108. Rueda de la fortuna Una feria local tiene una rueda de la fortuna cuyo radio es de 30 pies. El tiempo que toma una vuelta es de 70 segundos. ¿Cuál es la velocidad lineal (en pies por segundo) de esta rueda de la fortuna? ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo?

109. Cálculo de la velocidad de la corriente de un río Para aproximar la velocidad de la corriente de un río, se baja al agua una rueda de paletas con radio de 4 pies. Si la corriente hace que la rueda gire a una velocidad de 10 revoluciones por minuto, ¿cuál es la velocidad de la corriente? Exprese su respuesta en millas por hora.



110. Balanceo de llantas Un balanceador gira la llanta de un auto a 480 revoluciones por minuto. Si el diámetro de la llanta es de 26 pulgadas, ¿a qué velocidad de carretera se está probando? Exprese su respuesta en millas por hora. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe establecerse el balanceador para probar una velocidad de carretera de 80 millas por hora?

111. Teleférico de San Francisco En el Museo del Teleférico (Cable Car Museum) se observan cuatro líneas de cable que se usan para jalar las cabinas arriba y abajo de las colinas de San Francisco. Cada cabina va a una velocidad de 9.55 millas por hora como resultado de hacer girar una rueda con diámetro de 8.5 pies. ¿Qué tan rápido gira la rueda? Exprese su respuesta en revoluciones por minuto.

112. Diferencia en la hora del amanecer Naples, Florida, está alrededor de 90 millas al oeste de Ft. Lauderdale. ¿Cuánto tiempo antes una persona en Ft. Lauderdale verá el amanecer que una persona en Naples?

[**Sugerencia:** Consulte la figura. Cuando una persona en Q ve los primeros rayos del Sol, una persona en P todavía está en la oscuridad. La persona en P ve los primeros rayos del Sol después de que la Tierra gira hasta que P es en el lugar de Q. Ahora use el hecho de que a la latitud de Ft. Lauderdale en 24 horas se subtiende un arco de longitud de $2\pi(3559)$ millas].

113. Viajando igual que el Sol ¿Qué tan rápido debe viajar sobre la superficie de la Tierra en el ecuador para mantenerse igual que el Sol (es decir, para que el Sol parezca permanecer en la misma posición en cielo)?

114. Millas náuticas Una **milla náutica** es igual a la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 1 minuto en un gran círculo* sobre la superficie de la Tierra. (Vea la figura.) Si el radio de la Tierra se aproxima por 3960 millas, exprese 1 milla náutica en términos de millas normales.

115. Poleas Dos poleas, una con radio r_1 y otra con radio r_2, están conectadas con una correa. La polea con radio r_1 rota a ω_1 revoluciones por minuto, mientras que la polea con radio r_2 rota a ω_2 revoluciones por minuto. Demuestre que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

116. ¿Prefiere medir ángulos en grados o radianes? Proporcione una justificación y un razonamiento para su elección.

117. ¿Qué es un radián?

118. ¿Qué ángulo tiene la medida más grande: 1 grado o 1 radián? ¿O son iguales?

119. Explique la diferencia entre la velocidad lineal y la velocidad angular.

120. Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ grados subtiende un arco cuya longitud s es $s = \frac{\pi}{180} r\theta$. Analice si ésta es una proposición falsa o verdadera. Dé razones para defender su posición.

121. Analice por qué los barcos y los aviones usan millas náuticas para medir la distancia. Explique la diferencia entre una milla náutica y una milla normal.

122. Investigue cómo funcionan las bicicletas de velocidades. En particular, explique las diferencias y similitudes entre el sistema de cambios de una bicicleta de 5 velocidades y una de 9 velocidades. Asegúrese de incluir un análisis de velocidad lineal y velocidad angular.

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $C = 2\pi r$ **2.** $A = \pi r^2$

*Cualquier círculo dibujado sobre la superficie de la Tierra que la divide en dos hemisferios iguales.

6.2 Trigonometría del triángulo rectángulo

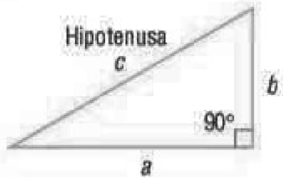
PREPARACIÓN PARA ESTA SECCIÓN *Antes de comenzar, repase lo siguiente:*

- Teorema de Pitágoras (Repaso, sección R.3, p. 30)
- Funciones (sección 3.1, pp. 218-226)

Trabaje ahora en los problemas de "¿Está preparado?", en la página 515.

OBJETIVOS
1. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos
2. Usar las identidades fundamentales
3. Encontrar el resto de las funciones trigonométricas dado el valor de una de ellas
4. Usar el teorema de ángulos complementarios

Figura 18



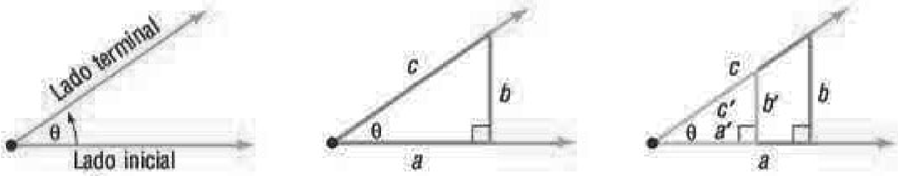
Un triángulo en el que un ángulo es recto (90°) se llama **triángulo rectángulo**. Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros lados **catetos** del triángulo. En la figura 18 se etiquetó la hipotenusa como c para indicar que su longitud es c unidades y, de manera similar, se etiquetaron los catetos como a y b. Dado que el triángulo es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras dice que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ahora, suponga que θ es un **ángulo agudo,** es decir, $0° < \theta < 90°$ (si θ se mide en grados) y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (si θ se mide en radianes). Vea la figura 19a). Con este ángulo agudo θ, se forma un triángulo rectángulo, como el ilustrado en la figura 19b), con hipotenusa de longitud c, y catetos de longitudes a y b. Al usar los tres lados de este triángulo, se podrían formar justo seis razones:

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{b}$$

Figura 19



a) Ángulo agudo b) Triángulo rectángulo c) Triángulos similares

De hecho, estas razones dependen sólo del tamaño del ángulo θ y no del triángulo formado. Para ver por qué, observe la figura 19c). Cualesquiera dos triángulos rectángulos formados usando el ángulo θ serán similares; por lo tanto, las razones correspondientes serán iguales. Como resultado,

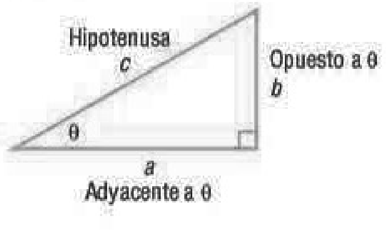
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \qquad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, se da a cada razón un nombre que involucra a θ: seno de θ, coseno de θ, tangente de θ, cosecante de θ, secante de θ y cotangente de θ.

Las seis razones de un triángulo rectángulo se llaman **funciones trigonométricas de ángulos agudos** y se definen como sigue:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
seno de θ	sen θ	$\frac{b}{c}$
coseno de θ	$\cos\theta$	$\frac{a}{c}$
tangente de θ	$\tan\theta$	$\frac{b}{a}$
cosecante de θ	$\csc\theta$	$\frac{c}{b}$
secante de θ	$\sec\theta$	$\frac{c}{a}$
cotangente de θ	$\cot\theta$	$\frac{a}{b}$

Figura 20



Como ayuda para recordar estas definiciones, puede ser útil referirse a las longitudes de los lados del triángulo por los nombres *hipotenusa* c), *opuesto* b) y *adyacente* a). Vea la figura 20. En términos de estos nombres, se tienen las siguientes razones:

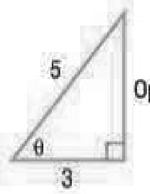
$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$
$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

Como a, b y c son positivos, cada una de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ es positiva.

1 **EJEMPLO 1** **Valores de las funciones trigonométricas**

Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ de la figura 21.

Figura 21



Solución En la figura 21 se ve que los dos lados dados del triángulo son

$$c = \text{hipotenusa} = 5 \qquad a = \text{adyacente} = 3$$

Para encontrar la longitud del lado opuesto, se usa el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}(\text{adyacente})^2 + (\text{opuesto})^2 &= (\text{hipotenusa})^2\\ 3^2 + (\text{opuesto})^2 &= 5^2\\ (\text{opuesto})^2 &= 25 - 9 = 16\\ \text{opuesto} &= 4\end{aligned}$$

Ahora que se conocen las longitudes de los tres lados, se usan las razones en (1) para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{4}{3}$$
$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{3}{4}$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

Identidades fundamentales

2 Tal vez observó algunas relaciones existentes entre las seis funciones trigonométricas de ángulos agudos. Por ejemplo, las **identidades recíprocas** son

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{2}$$

Otras dos identidades fundamentales que es fácil comprender son las **identidades de cociente**.

Identidades de cociente

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \tag{3}$$

Si sen θ y cos θ se conocen, las fórmulas (2) y (3) facilitan encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes.

EJEMPLO 2 Valores de las funciones trigonométricas restantes, dados sen θ y cos θ

Dados sen $\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y cos $\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, encuentre el valor de las funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Con base en la fórmula (3), se tiene

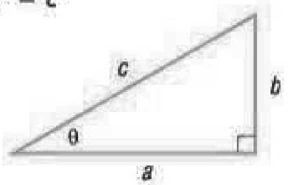
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

Entonces se usan las identidades recíprocas de la fórmula (2) para obtener

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 21.

Figura 22
$a^2 + b^2 = c^2$



Vea ahora el triángulo de la figura 22. El teorema de Pitágoras establece que $a^2 + b^2 = c^2$, que se escribe como

$$b^2 + a^2 = c^2$$

Al dividir cada lado entre c^2, se tiene

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

En términos de las funciones trigonométricas del ángulo θ, esta ecuación establece que

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \tag{4}$$

La ecuación (4), de hecho, es una identidad, ya que la ecuación es verdadera para cualquier ángulo θ.

Es costumbre escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ en lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$, $\cos^2\theta$ en lugar de $(\cos\theta)^2$, etcétera. Con esta notación, la ecuación (4) se puede escribir como

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1} \tag{5}$$

Otra identidad se obtiene de la ecuación (5) dividiendo cada lado entre $\cos^2\theta$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Ahora use las fórmulas (2) y (3) para obtener

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta} \tag{6}$$

De manera similar, al dividir cada lado de la ecuación (5) entre $\operatorname{sen}^2\theta$ se obtiene $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, que se escribe como

$$\boxed{\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta} \tag{7}$$

En forma colectiva, las identidades en las ecuaciones (5), (6) y (7) reciben el nombre de **identidades pitagóricas**.

Se hará una pausa para resumir las identidades fundamentales.

Identidades fundamentales

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

EJEMPLO 3 Valor exacto de una expresión trigonométrica usando identidades

Encuentre el valor exacto de cada expresión. No use una calculadora.

a) $\tan 20° - \dfrac{\operatorname{sen} 20°}{\cos 20°}$ b) $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{\sec^2\dfrac{\pi}{12}}$

Solución a) $\tan 20° - \dfrac{\operatorname{sen} 20°}{\cos 20°} = \tan 20° - \tan 20° = 0$

$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

b) $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{\sec^2\dfrac{\pi}{12}} = \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + \cos^2\dfrac{\pi}{12} = 1$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 39.

3 Una vez que se conoce el valor de una función trigonométrica, es posible encontrar el valor de las otras cinco funciones trigonométricas.

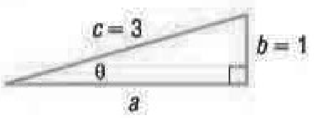
EJEMPLO 4 Valores de las otras funciones trigonométricas, dado sen θ, θ agudo

Dado que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{3}$ y θ es un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las cinco funciones trigonométricas de θ restantes.

Solución Este problema se resuelve de dos formas: la primera usa las definiciones de las funciones trigonométricas, la segunda usa las identidades fundamentales.

Solución 1 Usando la definición Se dibuja un triángulo rectángulo con el ángulo agudo θ, opuesto al lado de longitud $b = 1$ e hipotenusa de longitud $c = 3$ $\left(\text{porque } \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{3} = \dfrac{b}{c}\right)$. Vea la figura 23. El lado adyacente a se encuentra usando el teorema de Pitágoras.

Figura 23



$$a^2 + 1^2 = 3^2 \qquad a^2 + b^2 = c^2; b = 1, c = 3$$
$$a^2 + 1 = 9$$
$$a^2 = 8$$
$$a = 2\sqrt{2}$$

Ahora las definiciones dadas en la ecuación (1) se utilizan para encontrar el valor de las cinco funciones trigonométricas que faltan. (Regrese al método usado en el ejemplo 1). Con $a = 2\sqrt{2}$, $b = 1$ y $c = 3$, se tiene

$$\cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} = \frac{3}{1} = 3 \quad \sec\theta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

Solución 2 Usando identidades Se comienza por buscar $\cos\theta$, que se calcula usando la identidad de Pitágoras de la ecuación (5).

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (5)$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2\theta = 1 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Como $\cos\theta > 0$ para un ángulo agudo θ, se tiene

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ahora se sabe que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ y $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, de manera que se procede como se hizo en el ejemplo 2.

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

◄

Encontrar los valores de las funciones trigonométricas cuando se conoce uno

Dado el valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo θ, el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas de θ se encuentra de dos formas.

Método 1 Usando la definición

Paso 1: Se dibuja un triángulo rectángulo que muestre el ángulo θ.

Paso 2: Se podrían asignar valores a dos de los lados basados en la función trigonométrica dada.

Paso 3: Se encuentra la longitud del tercer lado usando el teorema de Pitágoras.

Paso 4: Se usan las definiciones en la ecuación (1) para encontrar el valor de las funciones trigonométricas que faltan.

Método 2 Usando identidades

Se utilizan las identidades adecuadas para encontrar el valor de las funciones trigonométricas restantes.

EJEMPLO 5 **Dado el valor de una función trigonométrica, encuentre los valores de las otras**

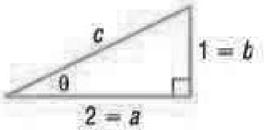
Dado $\tan\theta = \frac{1}{2}$, θ un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Solución 1 Usando la definición

La figura 24 muestra un triángulo rectángulo con el ángulo agudo θ, donde

$$\tan\theta = \frac{1}{2} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$

Figura 24 $\tan\theta = \frac{1}{2}$



Se elige $b = 1$ y $a = 2$. La hipotenusa c se determina mediante el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$
$$c = \sqrt{5}$$

Ahora se aplican las definiciones con $a = 2, b = 1$ y $c = \sqrt{5}$.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2$$

Solución 2 Usando identidades

Se usa la identidad de Pitágoras que involucra $\tan\theta$:

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2\theta \qquad \tan\theta = \frac{1}{2}$$
$$\sec^2\theta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \qquad \text{Proceder a despejar } \sec\theta.$$
$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ahora

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \text{así,} \quad \operatorname{sen}\theta = (\tan\theta)(\cos\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}$$

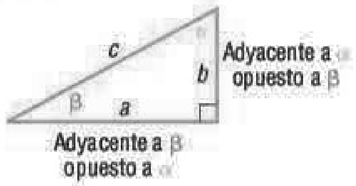
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 25.

Ángulos complementarios; cofunciones

4 Dos ángulos agudos se llaman **complementarios** si su suma es un ángulo recto. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es de 180°, se deduce que, para un triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son complementarios.

Figura 25



Vea la figura 25;se etiquetó el ángulo opuesto al lado b como β y el ángulo opuesto al lado a como α. Observe que el lado a es adyacente al ángulo β y opuesto al ángulo α. De manera similar, el lado b es opuesto al ángulo β y adyacente al ángulo α. Como resultado,

$$\begin{array}{lll} \text{sen } \beta = \dfrac{b}{c} = \cos \alpha & \cos \beta = \dfrac{a}{c} = \text{sen } \alpha & \tan \beta = \dfrac{b}{a} = \cot \alpha \\ \csc \beta = \dfrac{c}{b} = \sec \alpha & \sec \beta = \dfrac{c}{a} = \csc \alpha & \cot \beta = \dfrac{a}{b} = \tan \alpha \end{array} \tag{8}$$

Debido a estas relaciones, las funciones seno y coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante reciben el nombre de **cofunciones** una de la otra. Las identidades (8) se expresan en palabras como sigue:

Teorema

Teorema de ángulos complementarios

Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales.

Se presentan algunos ejemplos de este teorema.

Ángulos complementarios Ángulos complementarios Ángulos complementarios

$\text{sen } 30° = \cos 60°$ $\tan 40° = \cot 50°$ $\sec 80° = \csc 10°$

Cofunciones Cofunciones Cofunciones

Si un ángulo θ se mide en grados, se usará el símbolo de grados al escribir una función trigonométrica de θ; por ejemplo, sen 30° y tan 45°. Si un ángulo θ se mide en radianes, no se usará un símbolo al escribir una función trigonométrica de θ, como en $\cos \pi$ y $\sec \dfrac{\pi}{3}$.

Si θ es un ángulo agudo medido en grados, el ángulo $90° - \theta$ $\left(\text{o } \dfrac{\pi}{2} - \theta, \text{ si } \theta \text{ esta en radianes}\right)$ es el ángulo complementario de θ. La tabla 2 establece de nuevo el teorema anterior de cofunciones.

Tabla 2

θ (Grados)	**θ (Radianes)**
$\text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$	$\text{sen } \theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos \theta = \text{sen}(90° - \theta)$	$\cos \theta = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\tan \theta = \cot(90° - \theta)$	$\tan \theta = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\csc \theta = \sec(90° - \theta)$	$\csc \theta = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\sec \theta = \csc(90° - \theta)$	$\sec \theta = \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cot \theta = \tan(90° - \theta)$	$\cot \theta = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

El ángulo θ en la tabla 2 es agudo. Se verá más adelante (sección 7.4) que estos resultado son válidos para cualquier ángulo θ.

EJEMPLO 6 **Uso del teorema de ángulos complementarios**

a) $\operatorname{sen} 62° = \cos(90° - 62°) = \cos 28°$

b) $\tan \frac{\pi}{12} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cot \frac{5\pi}{12}$

c) $\cos \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

d) $\csc \frac{\pi}{6} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sec \frac{\pi}{3}$

EJEMPLO 7 **Uso del teorema de ángulos complementarios**

Encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

a) $\sec 28° - \csc 62°$ b) $\frac{\operatorname{sen} 35°}{\cos 55°}$

Solución a)
$$\sec 28° - \csc 62° = \csc(90° - 28°) - \csc 62° = \csc 62° - \csc 62° = 0$$

b)
$$\frac{\operatorname{sen} 35°}{\cos 55°} = \frac{\cos(90° - 35°)}{\cos 55°} = \frac{\cos 55°}{\cos 55°} = 1$$

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 43 Y 57.

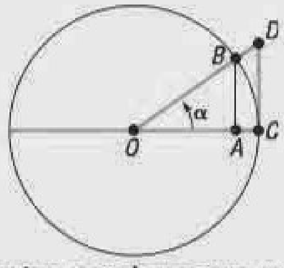
ASPECTO HISTÓRICO

El nombre *seno* para la función seno se debe a una confusión medieval. Viene de la palabra en sánscrito *jīva* (que significa *cuerda*); fue usado primero en India por Araybhata el Mayor (510 dC). Él realmente quiso decir media cuerda, pero lo abrevió. Esto incluyó en el árabe la palabra *jība* que no tenía significado. Debido a que la palabra árabe *jaib* se escribe de la misma manera (las vocales cortas no se escriben en árabe), *jiba* se pronunciaba como *jaib*, que quiere decir pecho o *seno*; hasta la fecha, *jaib* es la palabra árabe para *seno*. Los académicos que traducían los trabajos del árabe al latín encontraron que la palabra *sinus* también quería decir pecho o *seno*; para *sinus*, nosotros tenemos la palabra *seno*.

El nombre tangente, debido a Thomas Finck (1583), se entiende al observar la figura 26. El segmento de recta $\overline{DC}$ es tangente al círculo en C. Si $d(O, B) = d(O, C) = 1$, entonces la longitud del segmento $\overline{DC}$ es

$$d(D, C) = \frac{d(D, C)}{1} = \frac{d(D, C)}{d(O, C)} = \tan \alpha$$

Figura 26



El nombre antiguo para la tangente es *umbra versa* (que significa sombra volteada); se refiere al uso de la tangente en la solución de problemas de altura con sombras.

Los nombres de las cofunciones surgieron como sigue. Si α y β son ángulos complementarios, entonces $\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$. Como β es complemento de α, era natural escribir el coseno de α como *sen co* α. Tal vez por razones de facilidad de pronunciación, *co* migró al frente y después se dio una abreviatura de tres letras al coseno para uniformarlo con sen, sec y tan. Las otras dos cofunciones tuvieron un trato similar, excepto que las formas largas de *cotan* y *cosec* sobreviven hasta hoy en algunos países.

6.2 Evalúe su comprensión

"¿Está preparado?" *Las respuestas se dan al final de estos ejercicios. Si obtiene una respuesta equivocada, lea las páginas indicadas en azul.*

1. En un triángulo rectángulo, con catetos a y b e hipotenusa c, el teorema de Pitágoras establece que _________. (p. 30)

2. El valor de la función $f(x) = 3x - 7$ en 5 es _________. (pp. 218–226)

Conceptos y vocabulario

3. Dos ángulos agudos cuya suma es un ángulo recto se llaman _________.

4. Las funciones seno y ________ son cofunciones.

5. $\tan 28° = \cot$ _________.

6. Para cualquier ángulo θ, $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta =$ _________.

7. *Falso o verdadero:* $\tan \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$.

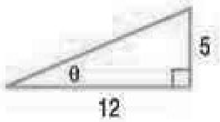
8. *Falso o verdadero:* $1 + \tan^2 \theta = \csc^2 \theta$.

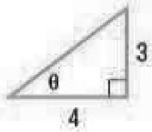
9. *Falso o verdadero:* si θ es un ángulo agudo y $\sec \theta = 3$, entonces $\cos \theta = \dfrac{1}{3}$.

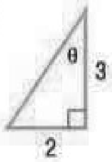
10. *Falso o verdadero:* $\tan \dfrac{\pi}{5} = \cot \dfrac{4\pi}{5}$.

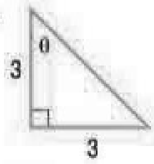
Ejercicios

En los problemas 11-20, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura.

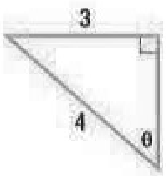
11.


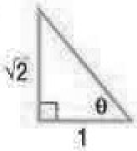
12.


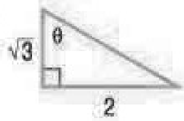
13.


14.


15.


16.


17.


18.


19.


20.


En los problemas 21-24, use las identidades para encontrar el valor exacto de las cuatro funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo θ.

21. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{2}, \quad \cos \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

22. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \theta = \dfrac{1}{2}$

23. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{2}{3}, \quad \cos \theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

24. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{3}, \quad \cos \theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

En los problemas 25-36, use la definición o las identidades para encontrar el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

25. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

26. $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

27. $\cos \theta = \dfrac{1}{3}$

28. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

29. $\tan \theta = \dfrac{1}{2}$

30. $\cot \theta = \dfrac{1}{2}$

31. $\sec \theta = 3$

32. $\csc \theta = 5$

33. $\tan \theta = \sqrt{2}$

34. $\sec \theta = \dfrac{5}{3}$

35. $\csc \theta = 2$

36. $\cot \theta = 2$

En los problemas 37-54, use las identidades fundamentales y/o el teorema de ángulos complementarios para encontrar el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

37. $\operatorname{sen}^2 20° + \cos^2 20°$

38. $\sec^2 28° - \tan^2 28°$

39. $\operatorname{sen} 80° \csc 80°$

40. $\tan 10° \cot 10°$

41. $\tan 50° - \dfrac{\operatorname{sen} 50°}{\cos 50°}$

42. $\cot 25° - \dfrac{\cos 25°}{\operatorname{sen} 25°}$

43. $\operatorname{sen} 38° - \cos 52°$

44. $\tan 12° - \cot 78°$

45. $\dfrac{\cos 10°}{\text{sen } 80°}$ **46.** $\dfrac{\cos 40°}{\text{sen } 50°}$ **47.** $1 - \cos^2 20° - \cos^2 70°$ **48.** $1 + \tan^2 5° - \csc^2 85°$

49. $\tan 20° - \dfrac{\cos 70°}{\cos 20°}$ **50.** $\cot 40° - \dfrac{\text{sen } 50°}{\text{sen } 40°}$ **51.** $\tan 35° \cdot \sec 55° \cdot \cos 35°$ **52.** $\cot 25° \cdot \csc 65° \cdot \text{sen } 25°$

53. $\cos 35° \text{ sen } 55° + \cos 55° \text{ sen } 35°$ **54.** $\sec 35° \csc 55° - \tan 35° \cot 55°$

55. Dado $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de
a) $\cos 60°$ b) $\cos^2 30°$
c) $\csc \dfrac{\pi}{6}$ d) $\sec \dfrac{\pi}{3}$

56. Dado $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de
a) $\cos 30°$ b) $\cos^2 60°$
c) $\sec \dfrac{\pi}{6}$ d) $\csc \dfrac{\pi}{3}$

57. Dado $\tan \theta = 4$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de
a) $\sec^2 \theta$ b) $\cot \theta$
c) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ d) $\csc^2 \theta$

58. Dado $\sec \theta = 3$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de
a) $\cos \theta$ b) $\tan^2 \theta$
c) $\csc(90° - \theta)$ d) $\text{sen}^2 \theta$

59. Dado $\csc \theta = 4$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de
a) $\text{sen } \theta$ b) $\cot^2 \theta$
c) $\sec(90° - \theta)$ d) $\sec^2 \theta$

60. Dado $\cot \theta = 2$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de
a) $\tan \theta$ b) $\csc^2 \theta$
c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ d) $\sec^2 \theta$

61. Dada la aproximación $\text{sen } 38° \approx 0.62$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor aproximado de
a) $\cos 38°$ b) $\tan 38°$
c) $\cot 38°$ d) $\sec 38°$
e) $\csc 38°$ (f) $\text{sen } 52°$
(g) $\cos 52°$ (h) $\tan 52°$

62. Dada la aproximación $\cos 21° \approx 0.93$, use las identidades trigonométricas para encontrar el valor aproximado de
a) $\text{sen } 21°$ b) $\tan 21°$
c) $\cot 21°$ d) $\sec 21°$
e) $\csc 21°$ f) $\text{sen } 69°$
g) $\cos 69°$ h) $\tan 69°$

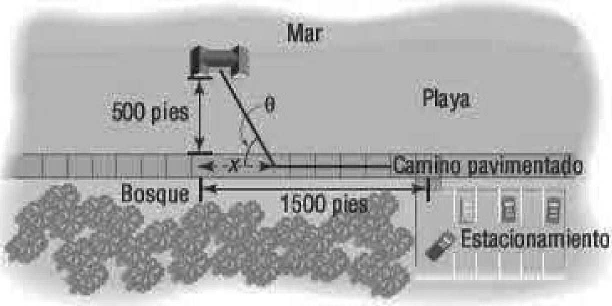
63. Si $\text{sen } \theta = 0.3$, encuentre el valor exacto de $\text{sen } \theta + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

64. Si $\tan \theta = 4$, encuentre el valor exacto de $\tan\theta + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

65. Encuentre un ángulo agudo θ que satisfaga la ecuación $\text{sen } \theta = \cos(2\theta + 30°)$.

66. Encuentre un ángulo agudo θ que satisfaga la ecuación $\tan \theta = \cot(\theta + 45°)$.

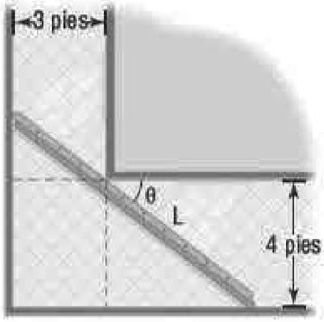
67. Cálculo del tiempo de viaje Se quiere caminar de un estacionamiento a una casa en la playa. La casa se localiza a 1500 pies por un camino pavimentado paralelo a la playa, que tiene 500 pies de ancho. En el camino se avanza a 300 pies por minuto, pero en la arena se avanza a 100 pies por minuto. Vea la ilustración.



a) Calcule el tiempo T si camina 1500 pies por el camino y luego 500 pies por la arena hasta la casa.
b) Calcule el tiempo T si camina 500 pies en la arena directamente hacia el mar y luego voltea a la izquierda para caminar 1500 pies por la arena hasta la casa.
c) Exprese el tiempo T para llegar del estacionamiento a la casa en la playa como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.
d) Calcule el tiempo T si camina directamente del estacionamiento a la casa.
[**Sugerencia:** $\tan \theta = 500/1500$]
e) Calcule el tiempo T si camina 1000 pies por el camino pavimentado y luego camina directamente a la casa.
f) Grafique $T = T(\theta)$. ¿Para qué ángulo θ es menor T? ¿Cuanto vale x para este ángulo? ¿Cuál es el tiempo mínimo?
g) Explique por qué $\tan \theta = \dfrac{1}{3}$ da el ángulo θ más pequeño posible.

68. Cargar una escalera dando la vuelta a una esquina Dos corredores, uno con 3 pies de ancho y el otro con 4 pies de ancho, se unen en ángulo recto. Vea la ilustración.
a) Exprese la longitud L del segmento de recta mostrado como función del ángulo θ.

b) Analice por qué la longitud de la escalera más larga que se puede cargar de un corredor a otro es igual al valor más pequeño de L.

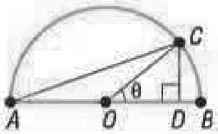


69. Suponga que el ángulo θ es un ángulo central de un círculo de radio 1 (vea la figura). Demuestre que

a) Ángulo $OAC = \dfrac{\theta}{2}$

b) $|CD| = \operatorname{sen}\theta$ y $|OD| = \cos\theta$

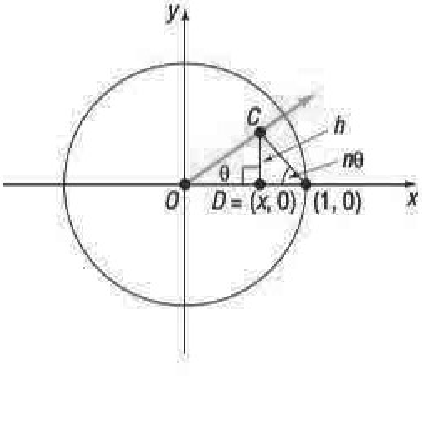
c) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$



70. Demuestre que el área A de un triángulo isósceles es $A = a^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, donde a es la longitud de uno de los lados iguales y θ es la medida de uno de los ángulos iguales (vea la figura).

71. Sea $n \geq 1$ cualquier número real y sea θ un ángulo para el que $0 < n\theta < \dfrac{\pi}{2}$. Entonces se dibuja un triángulo con los ángulos θ y $n\theta$ y el lado incluido de longitud 1 (¿por qué?) y se coloca en el círculo unitario como se ilustra. Ahora baje una perpendicular de C a $D = (x, 0)$ y demuestre que

$$x = \frac{\tan(n\theta)}{\tan\theta + \tan(n\theta)}$$

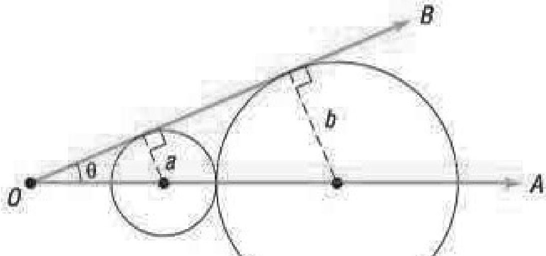


72. Vea la figura. El círculo más pequeño, cuyo radio es a, es tangente al círculo más grande, con radio b. El rayo $\overrightarrow{OA}$ contiene un diámetro de cada círculo y el rayo $\overrightarrow{OB}$ es tangente a cada círculo. Demuestre que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{ab}}{\dfrac{a+b}{2}}$$

(Esto muestra que $\cos\theta$ es la razón de la media geométrica de a y b entre la media aritmética de a y b).

[**Sugerencia:** Primero demuestre que $\operatorname{sen}\theta = (b-a)/(b+a)$].



73. Vea la figura. Si $|OA| = 1$, demuestre que

a) Área $\triangle OAC = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

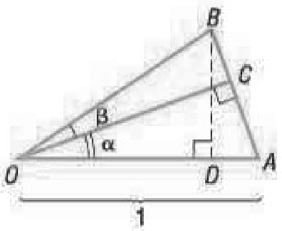
b) Área $\triangle OCB = \dfrac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

c) Área $\triangle OAB = \dfrac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$

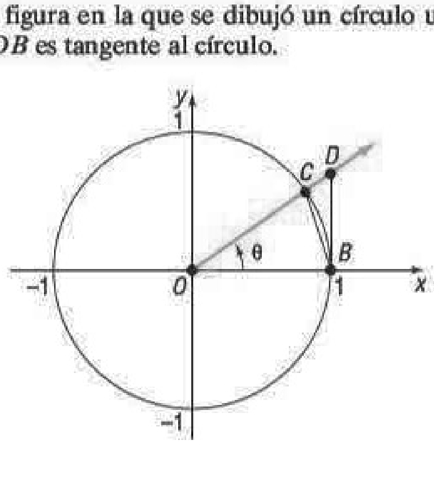
d) $|OB| = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

e) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

[**Sugerencia:** Área $\triangle OAB$ = Área $\triangle OAC$ + Área $\triangle OCB$]



74. Vea la figura en la que se dibujó un círculo unitario. La recta DB es tangente al círculo.



a) Exprese el área de $\triangle OBC$ en términos de sen θ y cos θ.
[**Sugerencia:** Use la altura de C a la base $\overline{OB} = 1$].

b) Exprese el área de $\triangle OBD$ en términos de sen θ y cos θ.

c) El área del sector circular OBC es $\frac{1}{2}\theta$, donde θ se mide en radianes. Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) y el hecho de que

$$\text{Área } \Delta OBC < \text{Área } \widehat{OBC} < \text{Área } \Delta OBD$$

para demostrar que

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

75. Si $\cos\alpha = \tan\beta$ y $\cos\beta = \tan\alpha$, donde α y β son ángulos agudos, demuestre que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

76. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $\sec\theta > 1$.

77. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $0 < \operatorname{sen}\theta < 1$.

78. ¿Cómo explicaría el significado de la función seno a un compañero que acaba de terminar el curso de álgebra en la universidad?

Respuestas a "¿Está preparado?"

1. $c^2 = a^2 + b^2$ **2.** $f(5) = 8$

6.3 Cálculo de valores de funciones trigonométricas de ángulos agudos

OBJETIVOS

1 Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$

2 Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$

3 Usar una calculadora para aproximar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos agudos

En la sección anterior, se desarrollaron formas de encontrar el valor de cada función trigonométrica de un ángulo agudo cuando se conoce una de las funciones. En esta sección se analiza el problema de encontrar el valor de cada función trigonométrica de un ángulo agudo, cuando se da el ángulo.

Para tres ángulos agudos especiales, se usan algunos resultados de la geometría plana para encontrar los valores exactos de cada una de las seis funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$

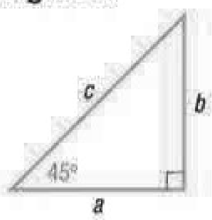
1 **EJEMPLO 1** **Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$**

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{4} = 45°$.

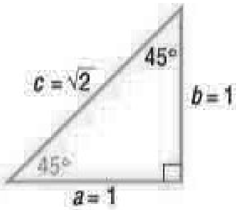
Solución Al utilizar el triángulo rectángulo de la figura 27*a*), en donde uno de los ángulos es $\frac{\pi}{4} = 45°$, se deduce que el otro ángulo agudo también es $\frac{\pi}{4} = 45°$, y, por lo tanto, el triángulo es isósceles. Como un resultado, el lado a y el lado b tienen la misma longitud. Como los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo dependen sólo del ángulo y no del tamaño del triángulo, se puede optar por usar el triángulo para el que

$$a = b = 1$$

Figura 27



a)



b)

Entonces, por el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$$
$$c = \sqrt{2}$$

Como resultado, se tiene el triángulo de la figura 27b), de donde se encuentra

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si se utilizan las identidades recíprocas y de cociente, se tiene

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec\frac{\pi}{4} = \sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \csc\frac{\pi}{4} = \csc 45° = \frac{1}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

◄

EJEMPLO 2 **Encontrar el valor exacto de una expresión trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $(\operatorname{sen} 45°)(\tan 45°)$ b) $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)$

Solución Se usan los resultados obtenidos en el ejemplo 1.

a) $(\operatorname{sen} 45°)(\tan 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)\left(\cot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$

◄

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 5 Y 17.

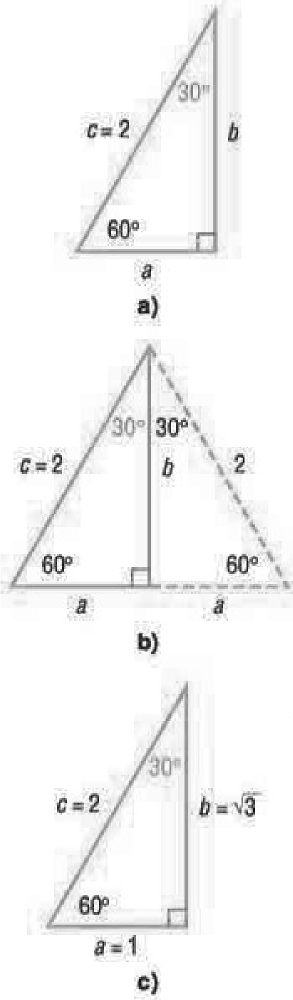
Funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$

2 **EJEMPLO 3** **Encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$**

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$.

Solución Se forma un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos es $\frac{\pi}{6} = 30°$. Entonces, el tercer ángulo es $\frac{\pi}{3} = 60°$. La figura 28a) ilustra este triángulo con hipotenusa de longitud 2. El problema es determinar a y b.

Figura 28



Se comienza por colocar al lado del triángulo de la figura 28a) otro triángulo congruente con el primero, como se muestra en la figura 28b). Observe que ahora se tiene un triángulo cuyos ángulos son de 60° cada uno. Por lo tanto, este triángulo es equilátero y sus lados tienen longitud 2. En particular, la base es $2a = 2$, es decir, $a = 1$. Por el teorema de Pitágoras, b satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, de manera que se tiene

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 1^2 + b^2 &= 2^2 \qquad a = 1, c = 2 \\ b^2 &= 4 - 1 = 3 \\ b &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Si se usa el triángulo de la figura 28c) y el hecho de que $\frac{\pi}{6} = 30°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$ son ángulos complementarios, se encuentra

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{6} = \csc 30° = \frac{1}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sec\frac{\pi}{3} = \sec 60° = 2$$

$$\sec\frac{\pi}{6} = \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc\frac{\pi}{3} = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\frac{\pi}{6} = \cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

◀

La tabla 3 resume la información que se acaba de desarrollar para los ángulos $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$. Mientras no memorice los elementos de la tabla 3, debe dibujar el triángulo adecuado para determinar los valores dados en la tabla.

Tabla 3

θ (Radianes)	θ (Grados)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

EJEMPLO 4 **Encontrar el valor exacto de una expresión trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $\operatorname{sen} 45° \cos 30°$ b) $\tan \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ c) $\tan^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}$

Solución a) $\operatorname{sen} 45° \cos 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

b) $\tan \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

c) $\tan^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 9 Y 19.

Es relativamente sencillo calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas para los ángulos $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ y $\frac{\pi}{3} = 60°$, porque los triángulos que contienen esos ángulos tiene características geométricas "agradables". Para casi todos los otros ángulos, sólo se pueden aproximar los valores de cada función trigonométrica. Para hacerlo, se necesitará una calculadora.

Uso de una calculadora para encontrar el valor de las funciones trigonométricas

3 Antes de comenzar, debe decidir si va a introducir el ángulo en la calculadora en radianes o grados y establecerla en el modo (MODE)* correcto. (Vea el manual del usuario de su calculadora para saber cómo maneja grados y radianes). Su calculadora tiene las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$. Para encontrar los valores de las tres funciones trigonométricas restantes (secante, cosecante y cotangente), se usan las identidades recíprocas.

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \csc \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

EJEMPLO 5 **Uso de una calculadora para aproximar el valor de funciones trigonométricas**

Utilice una calculadora para aproximar el valor de:

a) $\cos 48°$ b) $\csc 21°$ c) $\tan \frac{\pi}{12}$

Exprese su respuesta redondeada a dos decimales.

*Si su calculadora no despliega el modo, una manera de determinar el modo actual es evaluar $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{30}$. Si está en el modo de grados, la pantalla mostrará $\boxed{0.5}$ (sen 30° = 0.5). Si está en el modo de radianes aparecerá $\boxed{-0.9880316}$.

Solución a) Establezca el modo de grados. Redondee a dos decimales,

$$\cos 48° = 0.67$$

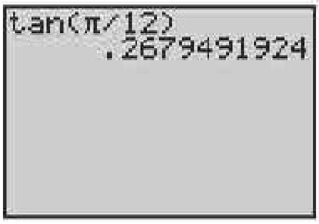
b) Casi ninguna calculadora tiene una tecla csc. Los fabricantes suponen que el usuario sabe trigonometría. Para encontrar el valor de csc 21°, utilice el hecho de que $\csc 21° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 21°}$. Redondee a dos decimales,

$$\csc 21° = 2.79$$

c) Establezca el modo de radianes. La figura 29 muestra la solución usando una calculadora TI-83 Plus. Redondee a dos decimales,

$$\tan \frac{\pi}{12} = 0.27$$

Figura 29

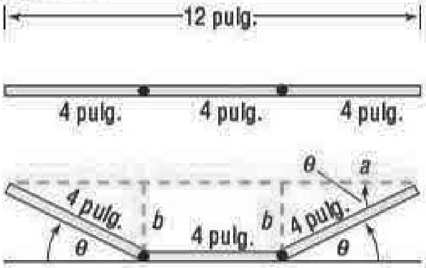


TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 29.

EJEMPLO 6 Construcción de drenaje pluvial

Debe construirse un drenaje pluvial a partir de hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una medida a 4 pulgadas de las orillas, se dobla hacia arriba un ángulo θ. Vea la figura 30.

Figura 30



a) Exprese el área A de la abertura como función de θ.

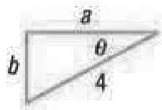
[**Sugerencia:** Sea b la altura vertical del doblez de θ].

b) Encuentre el área A del claro del drenaje para $\theta = 30°$, $\theta = 45°$, $\theta = 60°$ y $\theta = 75°$.

c) Grafique $A - A(\theta)$. Encuentre el ángulo θ que da la mayor A. (Este doblez permitirá el mayor flujo de agua por el drenaje).

Solución a) Vea de nuevo la figura 30. El área A del claro es la suma de las áreas de dos triángulos rectángulos congruentes y un rectángulo. Vea la figura 31, que muestra el triángulo de la figura 30 vuelto a dibujar. Se ve que

Figura 31



$$\cos\theta = \frac{a}{4} \quad \text{entonces} \quad a = 4\cos\theta \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{4} \quad \text{entonces} \quad b = 4\operatorname{sen}\theta$$

El área del triángulo es

$$\text{área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(4\cos\theta)(4\operatorname{sen}\theta) = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

De manera que el área de los dos triángulos es $16 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$.

El rectángulo tiene 4 de largo 4 y b de altura, entonces el área es

$$4b = 4(4\operatorname{sen}\theta) = 16\operatorname{sen}\theta$$

El área A del claro es

$$A = \text{área de los dos triángulos} + \text{área del rectángulo}$$
$$A(\theta) = 16\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 16\operatorname{sen}\theta = 16\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1)$$

b) Para $\theta = 30°$: $A(30°) = 16 \operatorname{sen} 30°(\cos 30° + 1)$

$$= 16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = 4\sqrt{3} + 8$$

El área del claro para $\theta = 30°$ es alrededor de 14.9 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 45°$: $A(45°) = 16 \operatorname{sen} 45°(\cos 45° + 1)$

$$= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 8 + 8\sqrt{2}$$

El área del valor para $\theta = 45°$ es cercana a 19.3 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 60°$: $A(60°) = 16 \operatorname{sen} 60°(\cos 60° + 1)$

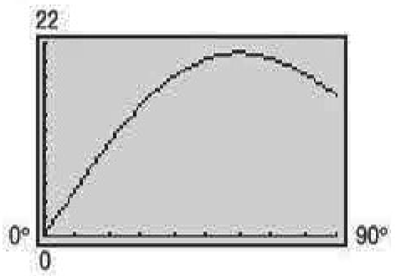
$$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 12\sqrt{3}$$

El área del valor para $\theta = 60°$ es cercana a 20.8 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 75°$: $A(75°) = 16 \operatorname{sen} 75°(\cos 75° + 1) \approx 19.5$

El área del valor para $\theta = 75°$ es cercana a 19.5 pulgadas cuadradas.

Figura 32



c) La figura 32 muestra la gráfica de $A = A(\theta)$. Usando MAXIMUM, el ángulo θ que da la mayor A es 60°.

6.3 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. $\tan\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} 30° =$ __________.
2. Usando una calculadora, sen 2 = _________, redondeado a dos decimales.
3. *Falso o verdadero:* se pueden encontrar valores exactos para las funciones trigonométricas de 60°.
4. *Falso o verdadero:* se pueden encontrar valores exactos para el seno de cualquier ángulo.

Ejercicios

5. Escriba los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de 45°.
6. Escriba los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de 30° y 60°.

En los problemas 7-16, encuentre el valor exacto de cada expresión si $\theta = 60°$. No use calculadora.

7. $\operatorname{sen}\theta$
8. $\cos\theta$
9. $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$
10. $\cos\frac{\theta}{2}$
11. $(\operatorname{sen}\theta)^2$
12. $(\cos\theta)^2$
13. $2\operatorname{sen}\theta$
14. $2\cos\theta$
15. $\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$
16. $\frac{\cos\theta}{2}$

En los problemas 17-28, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

17. $4\cos 45° - 2\operatorname{sen} 45°$
18. $2\operatorname{sen} 45° + 4\cos 30°$
19. $6\tan 45° - 8\cos 60°$
20. $\operatorname{sen} 30° \cdot \tan 60°$
21. $\sec\frac{\pi}{4} + 2\csc\frac{\pi}{3}$
22. $\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}$
23. $\sec^2\frac{\pi}{6} - 4$
24. $4 + \tan^2\frac{\pi}{3}$
25. $\operatorname{sen}^2 30° + \cos^2 60°$
26. $\sec^2 60° - \tan^2 45°$
27. $1 - \cos^2 30° - \cos^2 60°$
28. $1 + \tan^2 30° - \csc^2 45°$

En los problemas 29-46, use una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee la respuesta a dos decimales.

29. sen 28° **30.** cos 14° **31.** tan 21° **32.** cot 70° **33.** sec 41° **34.** csc 55°

35. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$ **36.** $\cos\frac{\pi}{8}$ **37.** $\tan\frac{5\pi}{12}$ **38.** $\cot\frac{\pi}{18}$ **39.** $\sec\frac{\pi}{12}$ **40.** $\csc\frac{5\pi}{13}$

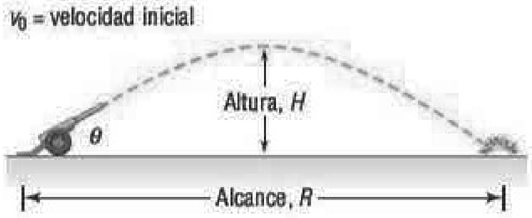
41. sen 1 **42.** tan 1 **43.** sen 1° **44.** tan 1° **45.** tan 0.3 **46.** tan 0.1

Movimiento de un proyectil La trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación θ respecto de la horizontal, con velocidad inicial v_0 es una parábola (vea la figura). El alcance R del proyectil, es decir, la distancia horizontal que recorre el proyectil, se encuentra usando la fórmula

$$R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}$$

donde $g \approx 32.2$ pies por segundo ≈ 9.8 metros por segundo es la aceleración debida a la gravedad. La máxima altura H del proyectil es

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$



En los problemas 47-50, encuentre el alcance R y la altura máxima H. Redondee las respuestas a dos decimales.

47. El proyectil se dispara a un ángulo de 45° con la horizontal, con velocidad inicial de 100 pies por segundo.

48. El proyectil se dispara a un ángulo de 30° con la horizontal, con velocidad inicial de 150 metros por segundo.

49. El proyectil se dispara a un ángulo de 55° con la horizontal, con velocidad inicial de 500 metros por segundo.

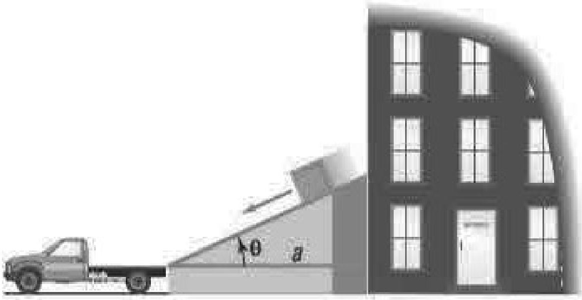
50. El proyectil se dispara a un ángulo de 50° con la horizontal, con velocidad inicial de 300 pies por segundo.

51. Plano inclinado Si se ignora la fricción, el tiempo t (en segundos) requerido para deslizar un bloque por un plano inclinado (vea la figura) está dado por la fórmula

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}$$

donde a es la longitud (en pies) de la base y $g \approx 32$ pies por segundo es la aceleración de la gravedad. Cuánto tarda un bloque en deslizarse por un plano inclinado con base $a = 10$ pies cuando

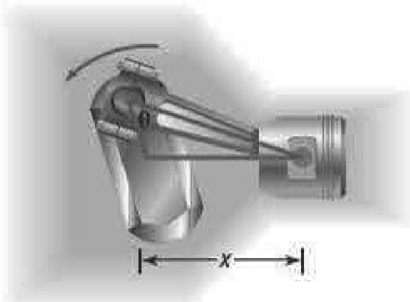
a) $\theta = 30°$? b) $\theta = 45°$? c) $\theta = 60°$?



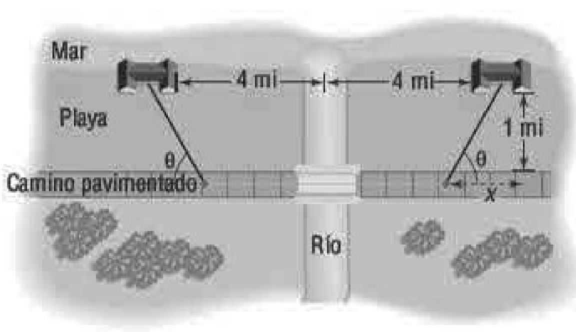
52. Motores de pistones En cierto motor de pistones, la distancia x (en metros) del centro del eje de transmisión a la cabeza del pistón está dada por

$$x = \cos\theta + \sqrt{16 + 0.5(2\cos^2\theta - 1)}$$

donde θ es el ángulo entre el cigüeñal y la trayectoria de la cabeza del pistón (vea la figura). Encuentre x cuando $\theta = 30°$ y cuando $\theta = 45°$.

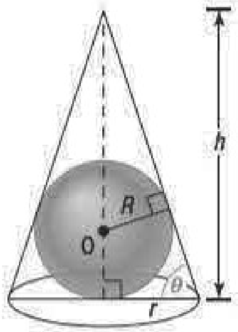


53. Tiempo de viaje Dos casas frente al mar están separadas 8 millas en una extensión recta de la playa, cada una a 1 milla de un camino pavimentado paralelo al mar. Sally es capaz de correr 8 millas por hora en el camino, pero sólo 3 millas por hora en la arena. Como hay un río entre las dos casas, debe correr por la arena hasta el camino, correr por el camino y luego en la arena otra vez para llegar de una casa a la otra. Vea la ilustración.



a) Exprese el tiempo T para ir de una casa a otra como función del ángulo θ mostrado en la ilustración.
b) Calcule el tiempo T para $\theta = 30°$. ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?
c) Calcule el tiempo T para $\theta = 45°$. ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?
d) Calcule el tiempo T para $\theta = 60°$. ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?
e) Calcule el tiempo T para $\theta = 90°$. Describa la trayectoria.
f) Calcule el tiempo T para $\tan \theta = \dfrac{1}{4}$. Describa la trayectoria. Explique por qué θ debe ser mayor que 14°.
g) Grafique $T = T(\theta)$. ¿En qué ángulo θ se da el menor tiempo? ¿Cuál es el menor tiempo? ¿Cuánto tiempo está Sally en el camino pavimentado?

54. Diseño de piezas decorativas finas Un diseñador de arte decorativo planea vender esferas sólidas de oro colocadas dentro de conos de cristal. Cada esfera tiene radio fijo R y está dentro de un cono de altura h y radio r. Vea la ilustración. Se pueden usar muchos conos para guardar la esfera, cada uno con un ángulo de inclinación θ diferente.



a) Exprese el volumen V del cono como función del ángulo de inclinación θ del cono.

[**Sugerencia:** El volumen V de un cono con altura h y radio r es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$].

b) ¿Qué volumen se requiere para encerrar a una esfera con radio de 2 cm en un cono cuyo ángulo de inclinación θ es de 30°, 45° o 60°?
c) ¿Qué ángulo de inclinación θ debe usarse para que el volumen V del cono sea mínimo? (Esta elección minimiza la cantidad de cristal requerido y da el máximo énfasis a la esfera de oro).

---

55. Use una calculadora en el modo de radianes para completar la siguiente tabla. ¿Qué se concluye acerca de la razón $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ cuando θ tiende a 0?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\operatorname{sen}\theta$								
$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$								

56. Use una calculadora en el modo de radianes para completar la siguiente tabla. ¿Qué se concluye acerca de la razón $\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ cuando θ tiende a 0?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\cos\theta - 1$								
$\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$								

57. Encuentre el valor exacto de $\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \tan 3° \cdot \ldots \cdot \tan 89°$.

58. Encuentre el valor exacto de $\cot 1° \cdot \cot 2° \cdot \cot 3° \cdot \ldots \cdot \cot 89°$.

59. Encuentre el valor exacto de $\cos 1° \cdot \cos 2° \cdot \ldots \cdot \cos 45° \cdot \csc 46° \cdot \ldots \cdot \csc 89°$.

60. Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen} 1° \cdot \operatorname{sen} 2° \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen} 45° \cdot \sec 46° \cdot \ldots \cdot \sec 89°$.

61. Escriba un párrafo breve que explique cómo calcular con rapidez las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.