4.1 Antiderivadas o primitivas e integración indefinida

- **Escribir la solución general de una ecuación diferencial.**
- **Usar la notación de la integral indefinida para las antiderivadas o primitivas.**
- **Utilizar las reglas de la integración básicas para encontrar antiderivadas.**
- **Encontrar una solución particular de una ecuación diferencial.**

EXPLORACIÓN

Determinación de antiderivadas o primitivas Para cada derivada, describir la función original F.

a) $F'(x) = 2x$

b) $F'(x) = x$

c) $F'(x) = x^2$

d) $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $F'(x) = \dfrac{1}{x^3}$

f) $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia se usó para determinar F?

Antiderivadas o primitivas

Suponer que se decide encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. Por lo que se sabe de derivadas, es posible afirmar que

$$F(x) = x^3 \text{ porque } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2.$$

La función F es una *antiderivada* de f.

DEFINICIÓN DE UNA ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Nótese que F es *una* antiderivada de f, en vez de *la* antiderivada de f. Para entender por qué, observar que

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5 \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^3 + 97$$

son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante C, la función dada por $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f.

TEOREMA 4.1 REPRESENTACIÓN DE ANTIDERIVADAS O PRIMITIVAS

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

DEMOSTRACIÓN La prueba del teorema 4.1 en un sentido es directa. Esto es, si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$, y C es constante, entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Para probar este teorema en otro sentido, se supone que G es una antiderivada de f. Se define una función H tal que

$$H(x) = G(x) - F(x).$$

Para cualesquiera dos puntos a y b $(a < b)$ en el intervalo, H es continua dentro de $[a, b]$ y diferenciable dentro de (a, b). Mediante el teorema del valor medio,

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}.$$

para algún c en (a, b). Sin embargo, $H'(c) = 0$, por consiguiente $H(a) = H(b)$. Dado que a y b son puntos arbitrarios en el intervalo, se sabe que H es una función constante C. Así, $G(x) - F(x) = C$ y esto conlleva a que $G(x) = F(x) + C$.

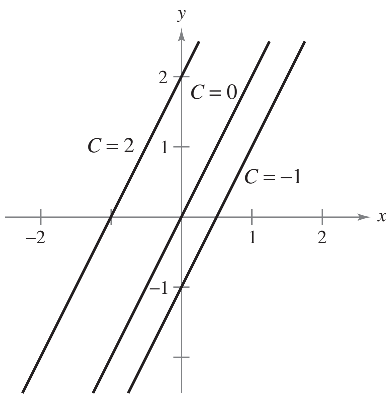
Si utiliza el teorema 4.1, puede representarse la familia completa de antiderivadas de una función agregando una constante a una antiderivada *conocida*. Por ejemplo, sabiendo que $D_x[x^2] = 2x$, es posible representar la familia de *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$ por

$$G(x) = x^2 + C \qquad \text{Familia de todas las antiderivadas de } f(x) = 2x.$$

donde C es constante. La constante C recibe el nombre de **constante de integración**. La familia de funciones representadas por G es la **antiderivada general** de f, y $G(x) = x^2 + C$ es la **solución general** de la *ecuación diferencial*.

$$G'(x) = 2x. \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

Una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye a x, y y *a* las derivadas de y. Por ejemplo, $y' = 3x$ y $y' = x^2 + 1$ son ejemplos de ecuaciones diferenciales.



Funciones de la forma $y = 2x + C$
Figura 4.1

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación diferencial

Determinar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución Para empezar, determinar una función cuya derivada es 2. Una función de esta característica es

$$y = 2x. \qquad 2x \text{ es } \textit{una} \text{ antiderivada de 2.}$$

Ahora bien, utilizar el teorema 4.1 para concluir que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = 2x + C. \qquad \text{Solución general.}$$

Las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$ se muestran en la figura 4.1.

Notación para antiderivadas o primitivas

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente

$$dy = f(x)\,dx.$$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina **antiderivación** (o **integración indefinida**) y se denota mediante un signo integral $\int$. La solución general se denota mediante

$$y = \int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}} \overbrace{dx}^{\text{Variable de integración}} = \underbrace{F(x)}_{\text{Una antiderivada de } f(x)} + \overbrace{C}^{\text{Constante de integración}}.$$

La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la *antiderivada o primitiva de f con respecto a x*. De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

NOTA En este texto, la notación $\int f(x)dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada o primitiva de f *en un intervalo*.

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede verificarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

La integración es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

La derivación es la "inversa" de la integración.

Estas dos ecuaciones permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \quad -1$	Regla de la potencia.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	

NOTA La regla de la potencia para la integración tiene la restricción $n \neq -1$. El cálculo de $\int 1/x\,dx$ debe esperar hasta el análisis de la función logaritmo natural en el capítulo 5. ■

EJEMPLO 2 Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las antiderivadas o primitivas de $3x$.

Solución

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 3\int x^1\,dx \qquad \text{Reescribir } x \text{ como } x^1.$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad \text{Regla de potencia } (n = 1).$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + C \qquad \text{Simplificar.}$$

De tal manera, las antiderivadas o primitivas de $3x$ son de la forma $\frac{3}{2}x^2 + C$, donde C es cualquier constante.

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. En el caso del ejemplo 2, se podría haber escrito

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{3}{2}x^2 + 3C.$$

Sin embargo, como C representa *cualquier* constante, es tanto problemático como innecesario escribir $3C$ como la constante de integración. De tal modo, $\frac{3}{2}x^2 + 3C$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + C$.

En el ejemplo 2, advertir que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original ⇨ Reescribir ⇨ Integrar ⇨ Simplificar

EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2\,\text{sen}\,x\,dx$	$2\int \text{sen}\,x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

TECNOLOGÍA Algunos programas de software tales como *Maple, Mathematica* y el *TI-89*, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si se tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilizarlas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

Recordar que, por simple derivación, puede comprobarse si una primitiva es correcta. Así, en el ejemplo 3*b*, para saber si la primitiva $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ es correcta, basta con derivarla para obtener

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}. \qquad \text{Usar la derivación para verificar la antiderivada.}$$

Las reglas básicas de integración listadas antes en esta sección permiten integrar cualquier función polinomial, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Integración de funciones polinomiales

a) $\int dx = \int 1\, dx$ Se entiende que el integrando es uno.

$= x + C$ Integrar.

b) $\int (x + 2)\, dx = \int x\, dx + \int 2\, dx$

$= \dfrac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2$ Integrar.

$= \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$ $C = C_1 + C_2$.

La segunda línea en la solución suele omitirse.

c) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)\, dx = 3\left(\dfrac{x^5}{5}\right) - 5\left(\dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{x^2}{2} + C$ Integrar.

$= \dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$ Simplificar.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ Reescribir como dos fracciones.

$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx$ Reescribir con exponentes fraccionarios.

$= \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^{1/2}}{1/2} + C$ Integrar.

$= \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$ Simplificar.

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{x}(x + 3) + C$

AYUDA DE ESTUDIO Recordar que la respuesta puede verificarse por derivación.

NOTA Cuando se integren los cocientes, no debe integrarse numerador y denominador por separado. Esto es incorrecto tanto en la integración como en la derivación. Al respecto, obsérvese el ejemplo 5.

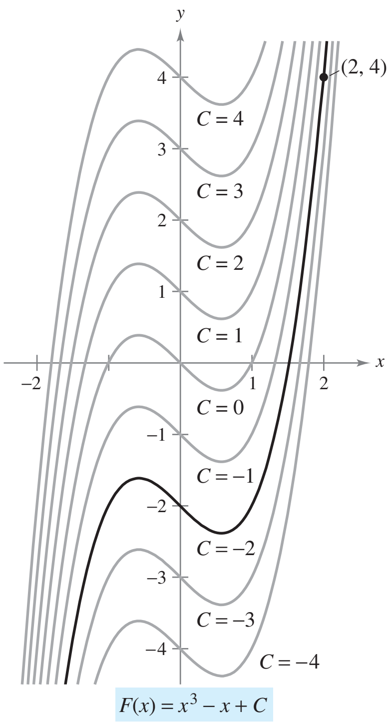
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C \quad \text{no es lo mismo que} \quad \frac{\int (x+1)\, dx}{\int \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + C_1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C_2}.$$

EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx$ Reescribir como un producto.

$= \int \sec x \tan x\, dx$ Reescribir utilizando identidades trigonométricas.

$= \sec x + C$ Integrar.



La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$

Figura 4.2

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Se ha visto que la ecuación $y = \int f(x)\,dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiriendo de las otras en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas o primitivas de f son traslaciones verticales una de otra. Por ejemplo, la figura 4.2 muestra las gráficas de varias de las antiderivadas o primitivas de la forma

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$

para diversos valores enteros de C. Cada una de estas antiderivadas o primitivas es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$$

En muchas aplicaciones de la integración, se da suficiente información para determinar una **solución particular**. Para hacer esto, sólo se necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x. Esta información recibe el nombre de **condición inicial**. Por ejemplo, en la figura 4.2, sólo una de las curvas pasa por el punto (2, 4). Para encontrar esta curva, se utiliza la siguiente información.

$$F(x) = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$
$$F(2) = 4 \qquad \text{Condición inicial.}$$

Utilizando la condición inicial en la solución general, es posible determinar que $F(2) = 8 - 2 + C = 4$, lo que implica que $C = -2$. De tal modo, se obtiene

$$F(x) = x^3 - x - 2. \qquad \text{Solución particular.}$$

EJEMPLO 7 Determinación de una solución particular

Encontrar la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

y determinar la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución Para encontrar la solución general, se integra para obtener

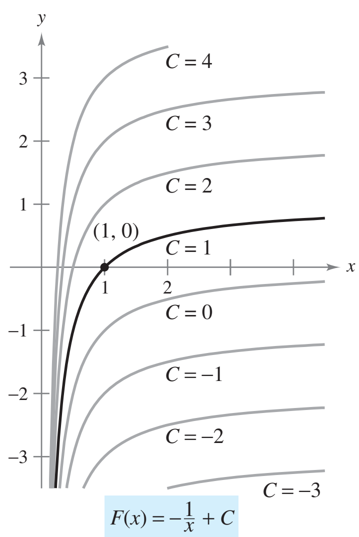
$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2}\,dx && F(x) = \textstyle\int F'(x)dx. \\ &= \int x^{-2}\,dx && \text{Reescribir como una potencia.} \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + C && \text{Integrar.} \\ &= -\frac{1}{x} + C, \quad x > 0. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resolver para C de la manera siguiente.

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

De tal modo, la solución particular, como se muestra en la figura 4.3, es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1, \quad x > 0. \qquad \text{Solución particular.}$$



La solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$ es $F(x) = -(1/x) + 1, x > 0$

Figura 4.3

Hasta ahora, en esta sección se ha utilizado x como variable de integración. En las aplicaciones, es a menudo conveniente utilizar una variable distinta. Así, en el siguiente ejemplo, la variable de integración es el *tiempo* t.

EJEMPLO 8 Solución de un problema de movimiento vertical

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t.
b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Solución

a) Considerar que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Las dos condiciones iniciales indicadas pueden escribirse de la siguiente manera.

$$s(0) = 80 \qquad \text{La altura inicial es 80 pies.}$$
$$s'(0) = 64 \qquad \text{La velocidad inicial es de 64 pies por segundo.}$$

Utilizando -32 pies/s² como la aceleración de la gravedad, se tiene

$$s''(t) = -32$$
$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1.$$

Empleando la velocidad inicial, se obtiene $s'(0) = 64 = -32(0) + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 64$. Después, integrando $s'(t)$, se obtiene

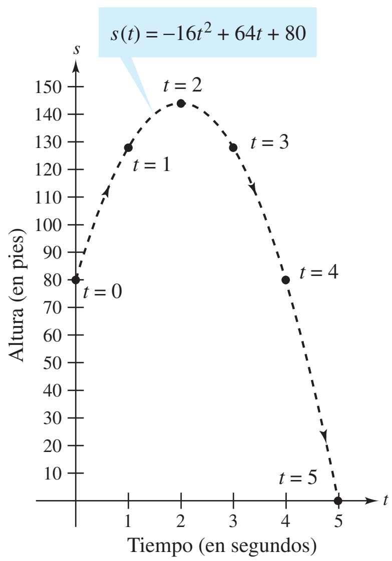
$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int (-32t + 64)\,dt = -16t^2 + 64t + C_2.$$

Al utilizar la altura inicial, se encuentra que

$$s(0) = 80 = -16(0^2) + 64(0) + C_2$$

lo que implica que $C_2 = 80$. De ese modo, la función posición es

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80. \qquad \text{Ver la figura 4.4.}$$



Altura de una pelota en el tiempo t
Figura 4.4

b) Utilizando la función posición que se encontró en el apartado *a*), es posible determinar el tiempo en que la pelota pega en el suelo al resolver la ecuación $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80 = 0$$
$$-16(t + 1)(t - 5) = 0$$
$$t = -1, 5$$

Como t debe ser positivo, se puede concluir que la pelota golpea el suelo 5 segundos después de haber sido lanzada.

NOTA En el ejemplo 8, obsérvese que la función posición tiene la forma

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

donde $g = -32$, v_0 es la velocidad inicial y s_0 es la altura inicial, como se presentó en la sección 2.2.

El ejemplo 8 muestra cómo utilizar el cálculo para analizar problemas de movimiento vertical en los que la aceleración es determinada por una fuerza gravitacional. Se puede utilizar una estrategia similar para analizar otros problemas de movimiento rectilíneo (vertical u horizontal) en los que la aceleración (o desaceleración) es el resultado de alguna otra fuerza, como se verá en los ejercicios 81 a 89.

Antes de hacer los ejercicios, se debe reconocer que uno de los pasos más importantes en la integración es *reescribir el integrando* en una forma que corresponda con las reglas básicas de integración. Para ilustrar este punto, a continuación se presentan algunos ejemplos adicionales.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\int x^{-1/2}\,dx$	$2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\int (t^2 + 1)^2\,dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\frac{t^5}{5} + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
$\int \frac{x^3 + 3}{x^2}\,dx$	$\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}(x - 4)\,dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3}$

4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, verificar el enunciado demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\int \left(-\frac{6}{x^4}\right) dx = \frac{2}{x^3} + C$
2. $\int \left(8x^3 + \frac{1}{2x^2}\right) dx = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C$
3. $\int (x - 4)(x + 4)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C$
4. $\int \frac{x^2 - 1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2(x^2 + 3)}{3\sqrt{x}} + C$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la solución general de la ecuación diferencial y verificar el resultado mediante derivación.

5. $\frac{dy}{dt} = 9t^2$
6. $\frac{dr}{d\theta} = \pi$
7. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$
8. $\frac{dy}{dx} = 2x^{-3}$

En los ejercicios 9 a 14, completar la tabla.

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$			
10.	$\int \frac{1}{4x^2}\,dx$			
11.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$			
12.	$\int x(x^3 + 1)\,dx$			
13.	$\int \frac{1}{2x^3}\,dx$			
14.	$\int \frac{1}{(3x)^2}\,dx$			

En los ejercicios 15 a 34, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

15. $\int (x + 7)\,dx$
16. $\int (13 - x)\,dx$
17. $\int (2x - 3x^2)\,dx$
18. $\int (8x^3 - 9x^2 + 4)\,dx$
19. $\int (x^5 + 1)\,dx$
20. $\int (x^3 - 10x - 3)\,dx$
21. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\,dx$
22. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$
23. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
24. $\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) dx$
25. $\int \frac{1}{x^5}\,dx$
26. $\int \frac{1}{x^6}\,dx$
27. $\int \frac{x + 6}{\sqrt{x}}\,dx$
28. $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4}\,dx$
29. $\int (x + 1)(3x - 2)\,dx$
30. $\int (2t^2 - 1)^2\,dt$
31. $\int y^2\sqrt{y}\,dy$
32. $\int (1 + 3t)t^2\,dt$
33. $\int dx$
34. $\int 14\,dt$

En los ejercicios 35 a 44, hallar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

35. $\int (5 \cos x + 4 \operatorname{sen} x)\,dx$
36. $\int (t^2 - \cos t)\,dt$
37. $\int (1 - \csc t \cot t)\,dt$
38. $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta)\,d\theta$
39. $\int (\sec^2 \theta - \operatorname{sen} \theta)\,d\theta$
40. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy$

41. $\int (\tan^2 y + 1)\, dy$

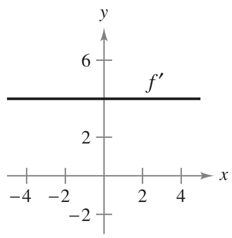
42. $\int (4x - \csc^2 x)\, dx$

43. $\int \dfrac{\cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx$

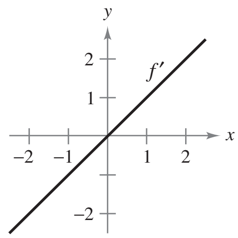
44. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

En los ejercicios 45 a 48, se presenta la gráfica de la derivada de una función. Dibujar las gráficas de *dos* funciones que tengan la derivada señalada. (Hay más de una respuesta correcta.)

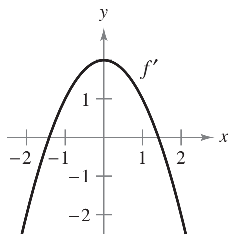
45.



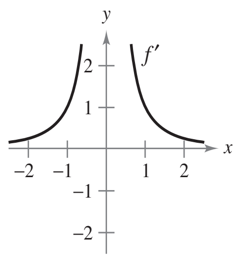
46.



47.

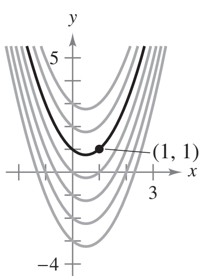


48.

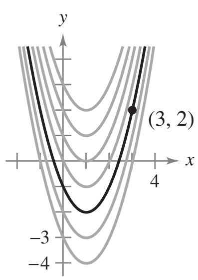


En los ejercicios 49 y 50, determinar la ecuación para *y*, dada la derivada y el punto indicado sobre la curva.

49. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

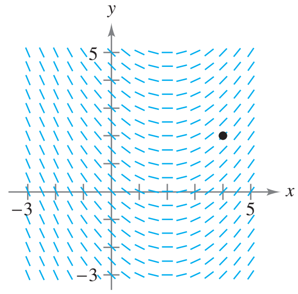


50. $\dfrac{dy}{dx} = 2(x - 1)$

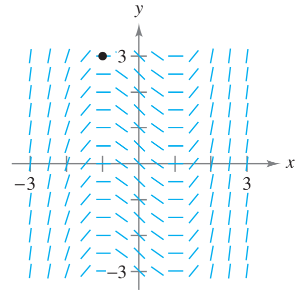


Campos de pendientes **En los ejercicios 51 a 54, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* (*o campo de direcciones*) está compuesto por segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pasa por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

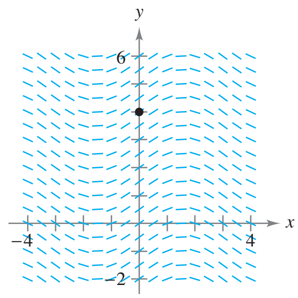
51. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - 1, \quad (4, 2)$



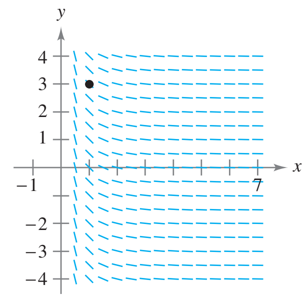
52. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1, \quad (-1, 3)$



53. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x, (0, 4)$



54. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}, x > 0, (1, 3)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 55 y 56, *a*) utilizar una herramienta de graficación para representar un campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) utilizar la integración y el punto indicado para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y *c*) hacer la gráfica de la solución y el campo de pendientes.**

55. $\dfrac{dy}{dx} = 2x, (-2, -2)$

56. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}, (4, 12)$

En los ejercicios 57 a 64, resolver la ecuación diferencial.

57. $f'(x) = 6x, f(0) = 8$

58. $g'(x) = 6x^2, g(0) = -1$

59. $h'(t) = 8t^3 + 5, h(1) = -4$

60. $f'(s) = 10s - 12s^3, f(3) = 2$

61. $f''(x) = 2,\ f'(2) = 5,\ f(2) = 10$

62. $f''(x) = x^2,\ f'(0) = 8,\ f(0) = 4$

63. $f''(x) = x^{-3/2},\ f'(4) = 2,\ f(0) = 0$

64. $f''(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 6$

65. ***Crecimiento de árboles*** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $dh/dt = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

a) Determinar la altura después de t años.

b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

66. ***Crecimiento de población*** La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días ($0 \le t \le 10$). Esto es, $dP/dt = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.